Engineering Library

FEB 2 - 1932

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

HERAUSGEGEBEN VON PROFESSOR R. VON MISES, BERLIN

Unter Mitwirkung von L. FÖPPL-München, G. HAMEL-Charlottenburg, Th. v. KÁRMÁN-Aachen, R. MOLLIER-Dresden, L. PRANDTL-Göttingen, H. REISSNER-Charlottenburg, R. RÜDENBERG-Berlin

:: Band 11 :: Seite 405 bis 468

:: Heft 6 :: Dezember 1931

I N H A L T:

HAUPTAUFSÄTZE:

Vorträge der Hauptversammlung in Bad Elster der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik / PÓLYA, Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung

ZUSAMMENF. BERICHTE:

NEMÉNYI, Tragwerke auf elastisch nachgiebiger Unterlage

KLEINE MITTEILUNGEN

BUCHBESPRECHUNGEN

NACHRICHTEN

V·D·I-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Bezugsbedingungen und Anzeigenpreise auf der 3. Umschlagseite.

Z. f. ang. Mathem. u. Mech. / Berlin, November/Dezember 1931 / Bd. 11 / Heft 6, Seite 405–468.

Copyright by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.

Die neusten „Forschungshefte"

Heft 335: **Die Werkstoff-Dämpfung bei Dreh- und Biegeschwingungsbeanspruchung.** Von *O. Föppl* und *G. Schaaf*. DIN A 4, IV/27 Seiten mit 54 Abb. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 336: **Untersuchungen über den Einfluß von Umwicklungen der Schweißstäbe auf die mechanischen Festigkeitseigenschaften der Schweiße.** Von Dr.-Ing. *K. Baumgärtel*. DIN A 4, IV/33 Seiten mit 49 Abb. und 16 Zahlentafeln. Brosch. RM 4,50 (für VDI-Mitglieder RM 4,—).

Heft 337: **Versuche über die Spannungsverteilung im Zughaken.** Von Dr.-Ing. *K. Böttcher*. DIN A 4, IV/20 Seiten mit 24 Abb. und 5 Zahlentafeln. Brosch. RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50.

Heft 338: **Der Druckabfall in gekrümmten glatten Rohrleitungen.** Von Dr.-Ing. *H. Richter*. DIN A 4, IV/30 Seiten mit 34 Abb. und 28 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,50 (für VDI-Mitglieder RM 5,—).

Heft 339: **Die Zustandsgrößen des Sauerstoffs bei tiefen Temperaturen (mit Diagrammen).** Von Dr.-Ing. *F. Schmidt*. DIN A 4, IV/20 Seiten mit 7 Abbildungen und 4 Tafeln. Broschiert RM 4,— (für VDI-Mitglieder RM 3,60).

Heft 340: **Untersuchungen über das Klopfen von Vergasermotoren.** Von Dr.-Ing. *L. Auer*. DIN A 4, IV/18 Seiten mit 24 Abbildungen und 12 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 341: **Das Mitreißen von Wasser aus dem Dampfkessel.** Von Dr.-Ing. *H. Vorkauf*. DIN A 4, IV/22 Seiten mit 45 Abbildungen. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 342: **Untersuchung von Automobilkühlern (Wasserröhrchenkühler).** Von Dr.-Ing. *K. Dehn*. DIN A 4, IV/20 Seiten mit 28 Abbildungen und 7 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 343: **Der Zünd- und Verbrennungsvorgang im Kohlenstaubmotor.** Von Dr.-Ing. *W. Wentzel*. DIN A 4, IV/24 Seiten mit 21 Abb. und 9 Zahlentafeln. Brosch. RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 344: **Thermodynamische Rechnungsgrundlagen der Verbrennungskraftmaschinen und ihre Anwendung auf den Höhenflugmotor.** Von Dr.-Ing. *A. Hansen*. DIN A 4, IV/28 Seiten mit 28 Abb., 22 Zahlentafeln und 18 Rechentafeln. Brosch. RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 345: **Zur Konstruktion von Kurvenscheiben bei Verarbeitungsmaschinen.** Von Dr.-Ing. *K. A. Flocke*. DIN A 4, IV/20 Seiten mit 36 Abbildungen. Broschiert RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 346: **Wärmespannungen in Gleichdruckwärmespeichern.** Von Dr.-Ing. *E. Mayer*. DIN A 4, IV/23 Seiten mit 31 Abb. Brosch. RM 5,— (für VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 347: **Staubausscheidung an einfachen Körpern und in Luftfiltern.** Von Dr.-Ing. *W. Sell*. DIN A 4, IV/23 Seiten mit 65 Abb. und 1 Zahlentafel. Brosch. RM 5,— (VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 348: **Der Wärmeübergang im Luftkompressor.** Von Dr.-Ing. *K. Kollmann*. DIN A 4, IV/22 Seiten mit 44 Abbildungen und 3 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,— (VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 349: **Arbeitsströmung einer Propellerturbine.** Von Dr.-Ing. *F. Busmann*. DIN A 4, IV/24 Seiten mit 78 Abbildungen und 2 Zahlentafeln. Broschiert RM 5,— (VDI-Mitglieder RM 4,50).

Heft 350: **Über den Schnittvorgang im Sande.** Von Dr.-Ing. *Joh. Rathje*. DIN A 4, IV/24 Seiten mit 83 Abbildungen. Brosch. RM. 5,— (VDI-Mitgl. RM 4,50).

Heft 351: **Die Wärmeübertragung bei zähen Flüssigkeiten in Rohren.** Von Dr.-Ing. *H. Kraussold*. DIN A 4, IV/20 Seiten mit 24 Abbildungen u. 6 Zahlentafeln. Brosch. RM 5,— (VDI-Mitgl. RM 4,50).

Die Reihe wird ab Heft 340 (seit Januar 1931) als regelmäßige Beilage zur Zeitschrift „Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens" (Ausgabe B) fortgesetzt.

Jedes Heft ist aber auch nach wie vor einzeln lieferbar.

VDI-Verlag / Berlin

Durch jede Buchhandlung zu beziehen!

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 11 | Dezember 1931 | Heft 6

Inhalt:

Seite

Hauptaufsätze. Vorträge der Hauptversammlung in Bad Elster der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik, von S. Bergmann, L. Prandtl, J. Nikuradse, O. Flachsbart, O. Schrenk, F. Eisner, J. W. Maccoll, K. Hohenemser, C. Weber, H. Schmidt, R. Iglisch, M. Herzberger, G. Stein, W. Cauer, E. Weinel, R. Beyer, J. Picht, L. Holzer, G. Schulz 405

G. Pólya: Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung 445

Zusammenfassende Berichte. Nemény i: Tragwerke auf elastisch nachgiebiger Unterlage 450

Seite

Kleine Mitteilungen. Behmann: Zur graphischen Behandlung der ganzen rationalen Funktion 463

Buchbesprechungen. Inada: Die Berechnung auf vier Seiten gestützter rechteckiger Platten. — Takabeya: Rahmentafeln. — v. Mises: Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. — Jordan-Reinhertz: Handbuch der Vermessungskunde. — Thorade: Probleme der Wasserwellen. — Schoenflies: Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. — Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. — Weiter eingegangene Bücher 465

Nachrichten 468

HAUPTAUFSÄTZE

Vorträge der Hauptversammlung in Bad Elster der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Die folgende Zusammenstellung umfaßt 19 Vortragsauszüge, die von den Vortragenden unserer Hauptversammlung in Bad Elster freundlichst zur Verfügung gestellt wurden.

1. Über Flüssigkeitsbewegungen mit Unstetigkeitsflächen.

Von *Stefan Bergmann* in Berlin.

Der Vortrag befaßt sich mit der Frage der Mehrdeutigkeit der Lösungen des Kirchhoff-Helmholtzschen Problems, insbesondere mit der Frage, ob zu einem gegebenen Widerstandskörper mehrere Kirchhoff-Helmholtzsche Strömungen existieren können, die bei gleicher Zuflußgeschwindigkeit verschiedene Abflußgeschwindigkeiten aufweisen.

Wir betrachten die Anströmung eines zylindrischen Widerstandskörpers (zweidimensionale Strömung) und untersuchen die beiden Fälle

1. der Vollströmung, wo die Flüssigkeit nach außen unbegrenzt ist (vgl. Abb. 1),
2. der Kanalströmung, wo die Flüssigkeit durch zwei feste Wände begrenzt ist (Abb. 2).

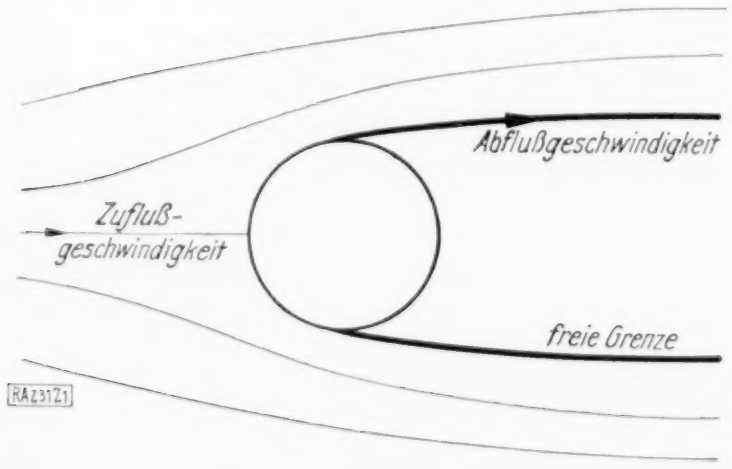


Abb. 1. Vollströmung.

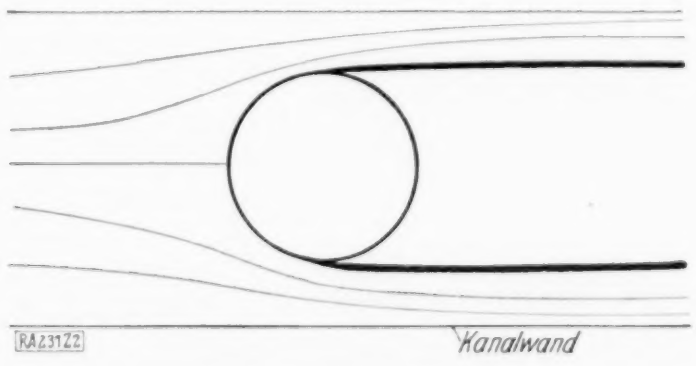


Abb. 2. Kanalströmung.

Während *bei der Vollströmung*, wie aus einem funktionentheoretischen Satz von Lindelöf folgt, *die Zufluß- und Abflußgeschwindigkeit* (d. h. die Geschwindigkeit auf der freien Grenze) *gleich sind, gibt* es im Falle *der Kanalströmung Widerstandskörper, für die mehrere Lösungen des Kirchhoff-Helmholtzschen Problems existieren, und zwar solche, die* (bei gleicher Zuflußgeschwindigkeit) *verschiedene Abflußgeschwindigkeiten besitzen.*

Um dies zu zeigen, beweisen wir zunächst den Nachbarschaftssatz. Zu jeder Strömung Σ (vgl. Abb. 3) einer gewissen Klasse von symmetrischen Strömungen gibt es Strömungen Σ_η mit gleicher Zuflußgeschwindigkeit und wesentlich verschiedener Abflußgeschwindigkeit, deren Widerstandskontur Ω_η beliebig wenig von der Kontur $\bar{\omega}_\eta$ der Strömung Σ verschieden ist (hierbei ist die Kontur von Σ in erlaubter Weise[1]) geeignet abzuändern). Um den Nachweis dieses Satzes zu führen, bilden wir den oberen Teil des Strömungsgebietes von Σ durch

$$\zeta = f(z)$$

[wo $f(z)$ das komplexe Potential bedeutet] auf einen Streifen $\mathfrak{S}$ (Abb. 4) ab. Mit

$$F(\zeta) = \frac{1}{w} = \frac{dz}{d\zeta}$$

bezeichnen wir den Geschwindigkeitsplan der Strömung Σ. Dieser bildet den Streifen $\mathfrak{S}$ auf ein Gebiet $\mathfrak{T}$ (Abb. 5) ab. Bezeichnet man mit $G_\eta(\zeta)$ diejenige Funktion, die den Streifen $\mathfrak{S}$

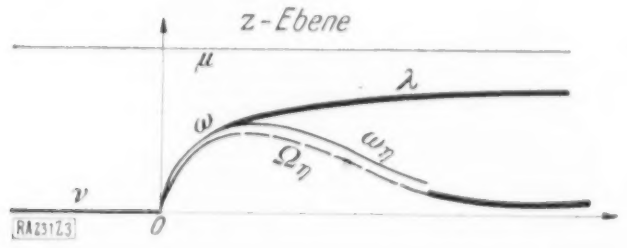


Abb. 3. Strömungen Σ und Σ_η (die oberen Hälften). μ Kanalwand, ω feste Grenze von Σ, λ freie Grenze von Σ, Ω_η Widerstandskontur von Σ_η, $\bar{\omega}_\eta = \omega + \omega_\eta$.

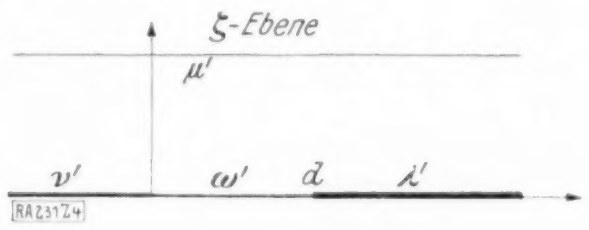


Abb. 4. Der Streifen $\mathfrak{S}$.

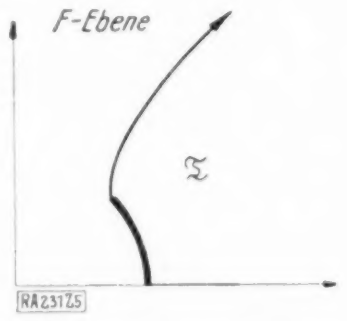


Abb. 5. Geschwindigkeitsplan der Strömung Σ.

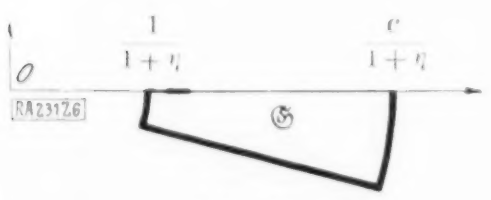


Abb. 6.

auf das Gebiet $\mathfrak{G}$ (Abb. 6) abbildet, wobei die Punkte $\zeta = -\infty$, d, ∞ des Streifens $\mathfrak{S}$ in die Punkte 1, $\frac{1}{1+\eta}$, $\frac{c}{1+\eta}$[2]) von $\mathfrak{G}$ übergehen und wählt man η genügend klein, so erhält man, wie gezeigt werden kann, in

$$F_\eta(\zeta) = F(\zeta)\, G_\eta(\zeta)$$

einen Geschwindigkeitsplan (Abb. 7), der zur Strömung Σ_η mit den in dem Nachbarschaftssatz angegebenen Eigenschaften führt.

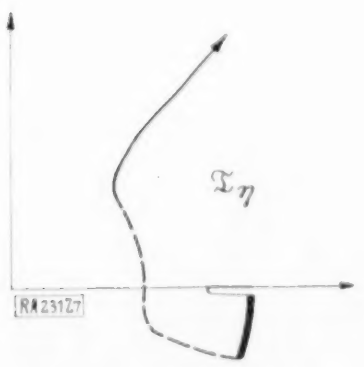


Abb. 7. Geschwindigkeitsplan der Strömung Σ_η.

Während die Zuflußgeschwindigkeiten der Strömungen Σ und Σ_η beide gleich 1 sind, ist die Abflußgeschwindigkeit von Σ bzw. Σ_η gleich a bzw. $\frac{a(1+\eta)}{c}$.

Um eine Widerstandskontur zu konstruieren, zu der zwei Kirchhoff-Helmholtzsche Strömungen existieren, gehen wir von einer Rayleigh-Réthy-Bobyleffschen Strömung mit der Zuflußgeschwindigkeit 1 und der Abflußgeschwindigkeit a aus und konstruieren die zu ihr genügend benachbarte Lösung Σ_η. Zur Widerstandskontur von Σ_η gehört dann eine zweite Strömung Σ'' von Rayleigh-Réthy-Bobyleffschen Typus mit der Zuflußgeschwindigkeit 1 und der Abflußgeschwindigkeit a_η, wo $\lim_{\eta \to 0} a_\eta = a$ ist, während die Abflußgeschwindig-

[1]) Unter einer erlaubten Abänderung ist eine solche zu verstehen, wo die im Totwasser liegenden Teile der Kontur durch andere Kurven zu ersetzen sind, die sich unmittelbar an die feste Berandung anschließen und sich noch im Totwasser befinden.

[2]) c muß dabei so gewählt werden, daß es größer als eins und kleiner als das Verhältnis der Abflußgeschwindigkeit der Strömung Σ zu ihrer Zuflußgeschwindigkeit wird.

keit von $\underline{\Sigma}'_\eta$ bei genügend kleinen η den von a_η verschiedenen Wert $\frac{a(1+\eta)}{c}$ hat (vgl. Abb. 8). [Die Ablösungsstellen der beiden Strömungen sind ebenfalls wesentlich verschieden.]

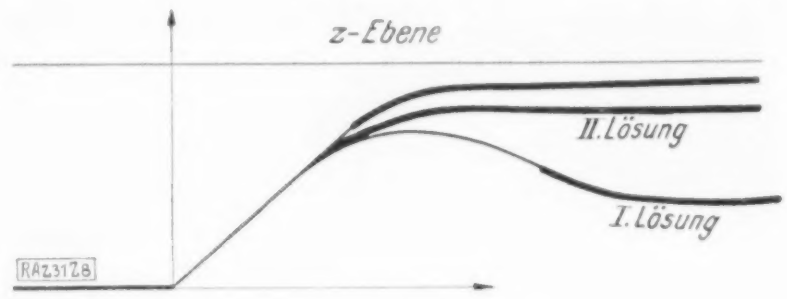


Abb. 8. Widerstandskontur mit zwei verschiedenen Lösungen $\underline{\Sigma}_\eta$ und $\underline{\Sigma}'$.

Die hier dargelegten Betrachtungen, deren ausführliche Darstellung in dieser Zeitschrift erscheint, sind durch eine physikalische Problemstellung veranlaßt, die von Herrn v. Mises herrührt. 231, 1

2. Über die Entstehung der Turbulenz.

Von *L. Prandtl* in Göttingen.

Mein heutiger Bericht knüpft an die Ausführungen an, die ich auf dem Physikertag in Jena 1921 vorgetragen habe[1]). In dem damals entwickelten Programm sind wir in der Zwischenzeit um einige Schritte weitergekommen. Zu einem Abschluß der Untersuchungen wird es aber noch ein gutes Stück Weges weiter sein. Was ich heute vorbringen will, mag als ein bescheidener Zwischenbericht gewertet werden.

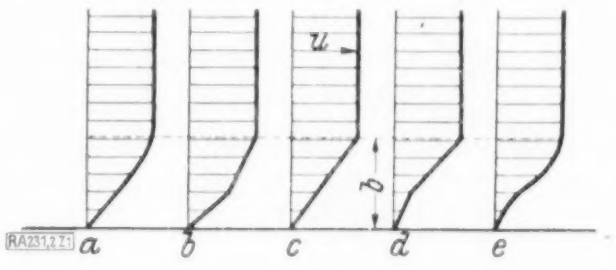


Abb. 1.

Zunächst wird es nötig sein, den Stand zur Zeit meines ersten Berichts kurz zu kennzeichnen. Ich beschränke mich auf den Fall der Strömung längs einer Wand und bemerke dazu, daß auch beim Rohr der Turbulenzbeginn regelmäßig in der Anlaufstrecke liegt, wo in der Rohrmitte noch nahezu konstante Geschwindigkeit herrscht und die Vorgänge in der Reibungsschicht längs der Wand von den gegenüberliegenden Wandstellen noch wenig beeinflußt sind. Bei der Untersuchung ist also von einer Geschwindigkeitsverteilung gemäß Profil *a* von Abb. 1 ausgegangen. Mit Rücksicht auf rechnerische Erleichterung wurden damals aber nach dem Vorgang von Lord Rayleigh[2]) polygonale Geschwindigkeitsverteilungen entsprechend Abb. 1 b, c und d zugrundegelegt und die kleinen Schwingungen solcher Systeme untersucht. Eine erste Nährung, die die Flüssigkeit als reibungslos annimmt, zeigte dabei, daß die Profile *b* und *c* stabil sind, Profile mit einspringendem Winkel wie *d* aber instabil. Man schloß daraus, daß auch überall konvex gekrümmte Profile stabil sind, solche mit Wendepunkt entsprechend Abb. 1 e aber instabil. Eine angenäherte Berücksichtigung der Reibung (Vorgänge in einer Grenzschicht an der Wand) ergab in den reibungslos stabilen Fällen immer Anfachung gewisser verhältnismäßig langer Wellen[3]). Es ergab sich also ein Anlaß zum Turbulentwerden, aber keine kritische Geschwindigkeit. Die Größenordnung des Anwachsens der Störung war in den beiden betrachteten Fällen sehr verschieden. Die relative Zunahme der Störungsamplitude pro Einheit des Weges entlang der Wand $\frac{1}{A}\frac{dA}{dx}$ war bei den Profilen mit Wendepunkt von der Größenordnung $\frac{1}{b}$, bei den konvexen Profilen aber von der Größenordnung $\frac{1}{b}\sqrt{\frac{\nu}{ub}}$, also rd. 30- bis 50 mal kleiner in der Gegend der beobachteten kritischen Reynoldsschen Zahlen.

Daß keine kritische Geschwindigkeit gefunden wurde, ist mit Recht der Ersetzung des gekrümmten Profils durch das polygonale zur Last gelegt worden. Es hieß also gekrümmte Profile zu studieren! Daß bei diesen besondere Schwierigkeiten an der Stelle auftreten, wo die Phasengeschwindigkeit der Wellenbewegung gleich der Strömungsgeschwindigkeit ist, hat schon Lord Rayleigh festgestellt[4]). Einen ersten Anlauf in dieser Richtung hat Herr Heisenberg in seiner Münchener Dissertation[5]) unternommen, doch sind seine numerischen

---

[1]) L. Prandtl: Bemerkungen über die Entstehung der Turbulenz. Phys. Zeitschr. 23, 19, 1922.

[2]) Lord Rayleigh: On the stability or instability of certain fluid motions II. Proc. Lond. Math. Soc. 19, 67, 1877 = Papers III. p. 17.

[3]) O. Tietjens: Beiträge zur Entstehung der Turbulenz. Zs. f. angew. Math. u. Mech. 5, 200, 1925.

[4]) Lord Rayleigh: On the stability or instability of certain fluid motions III. Proc. Lond. Math. Soc. 27, 5, 1895 = Papers IV, p. 203.

[5]) W. Heisenberg: Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen. Ann. d. Phys. (IV), 74, 597, 1924.

Rechnungen nicht weit genug durchgeführt worden. Die erste m. E. einwandfreie Rechnung ist von W. Tollmien durchgeführt worden[6]). Diese Rechnung, die allerdings auch nur eine erste Näherung für kleine Zähigkeit darstellt, ergab eine klare kritische Geschwindigkeit, deren Wert nicht schlecht zu den Versuchen stimmt. Tollmien rechnete allerdings nur die Stabilitätsgrenze, nicht aber die Größe der Anfachung im instabilen Gebiet. Da jedoch für lange Wellen die Tietjensschen Resultate bestätigt wurden, ist auch dieselbe Größenordnung für die Anfachung zu erwarten, vermutlich allerdings mit etwas kleineren Zahlenwerten. Herr Tollmien hat inzwischen laut brieflicher Mitteilung die reibungslose Instabilität von

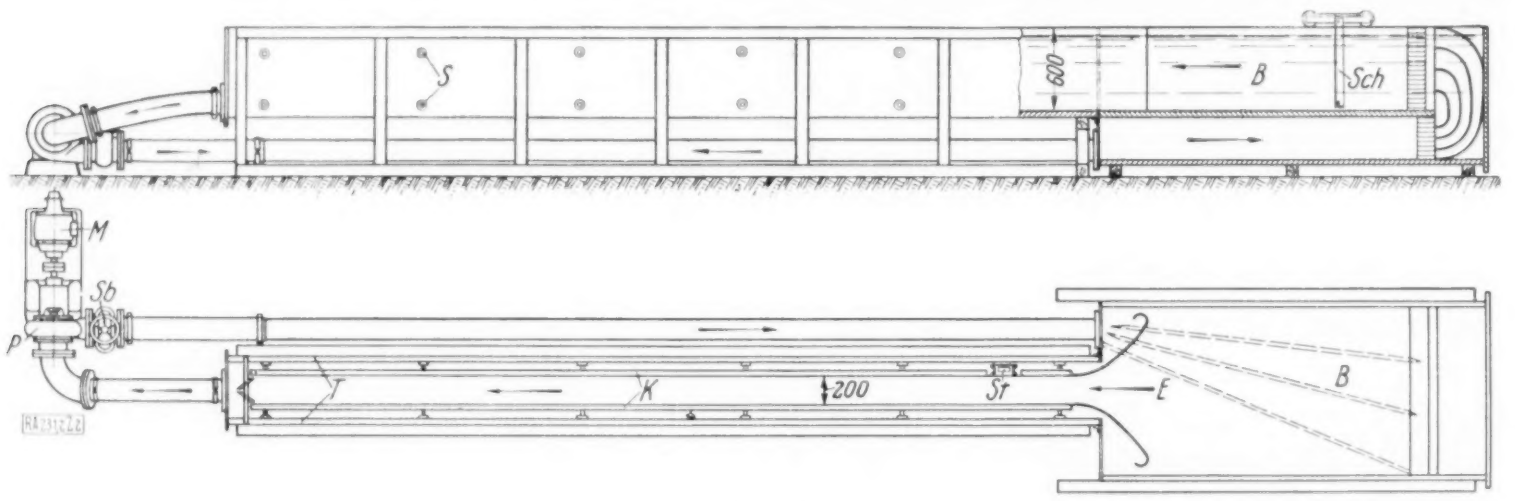


Abb. 2.

Legende zu Abb. 2 bis 4.

T = Tank
R = Rahmen
K = Kanal
B = Beruhigungsbecken
E = Einlauf
P = Pumpe
M = Motor
Sb = Regulierschieber
S = Schraubenspindeln zur Verstellung der Kanalweite
St = Störungskammer
k = Keil
h = Heber
Sch = fahrbarer Schirm (nur bei Bedarf eingesetzt)

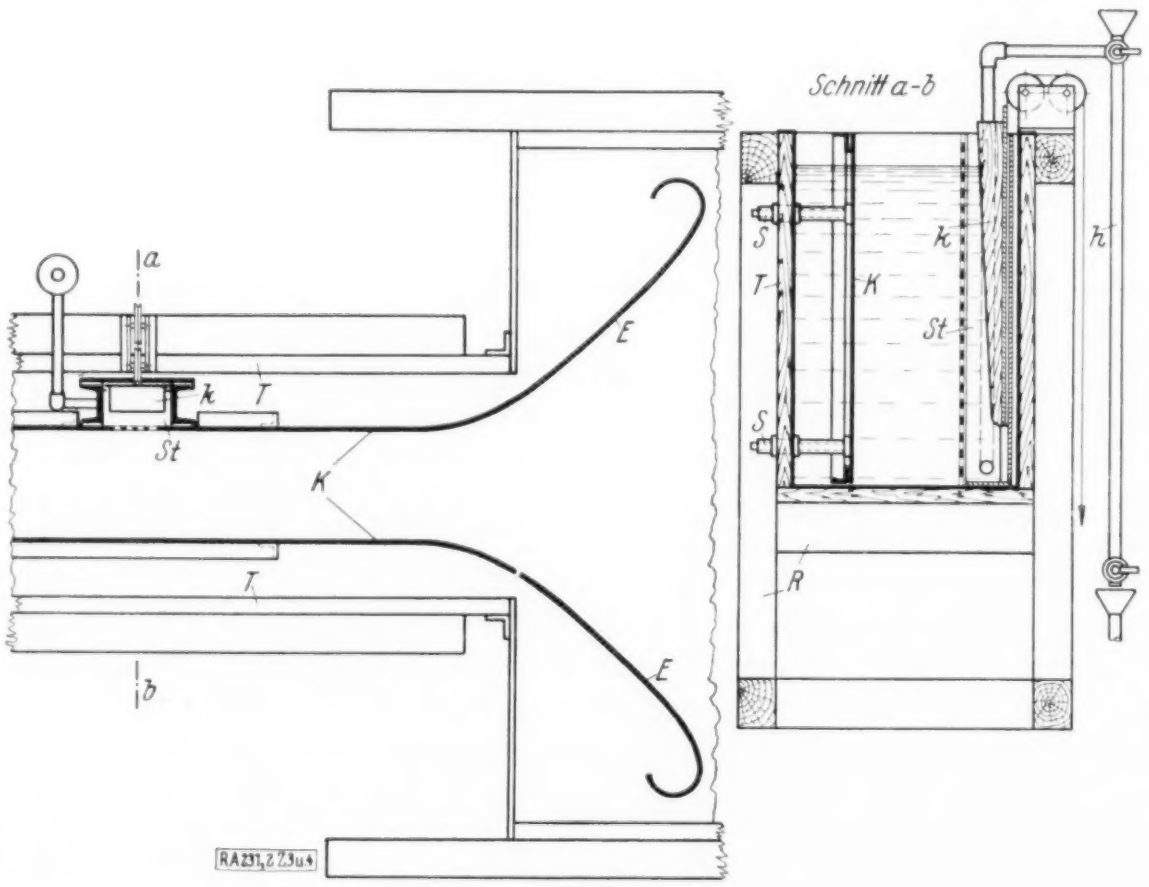


Abb. 3 u. 4 (nebenstehend).

Profilen mit Wendepunkt nachweisen können und auch hierfür die früher erwartete Größenordnung $\frac{1}{b}$ bestätigen können, so daß also das Auftreten eines Profils mit Wendepunkt infolge irgendeiner Störung als die eigentliche Ursache des wirklichen Turbulenzbeginns angesehen werden muß.

Auf Grund von auffällig hohen kritischen Geschwindigkeiten für die Strömung zwischen zwei konzentrischen Zylindern, von denen der äußere umläuft und der innere stillsteht, habe ich für die Anlaufzustände eines solchen Systems, wo die Zentrifugalkraft mit im Spiel ist, die Tollmiensche Rechnung wiederholen lassen. Der Radius des inneren Zylinders wurde dabei zur Vereinfachung gleich Null genommen, da die wesentlichen Vorgänge doch in der bis zu dem fraglichen Zeitpunkt in Bewegung gesetzten Schicht in der Nähe des äußeren Zylinders zu erwarten sind. Die kleinste Reynoldssche Zahl $\frac{u\,r}{\nu}$, bei der im Laufe des Wachsens der mitgenommenen Schicht die Stabilitätsgrenze erreicht wurde[7]), ergab sich nach

[6]) W. Tollmien: Über die Entstehung der Turbulenz. 1. Mitteilung. Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, 1929, S. 21.

[7]) Die Schichtdicke b entsprechend Abb. 1 ist in diesem Grenzfall etwa 0,25 r, bei höheren Reynoldsschen Zahlen an der Stabilitätsgrenze wesentlich kleiner, z. B. bei $\frac{r\,u}{\nu} = 100000$ etwa 0,07 r.

den Rechnungen, die Herr Schlichting ausgeführt hat, zu 66000 (u = Umfangsgeschwindigkeit, r = Radius des äußeren Zylinders). Bei einem Versuch mit einem Radius des inneren Zylinders = 0,68 r wurde experimentell $\frac{u\,r}{\nu} = 70000$ gefunden.

In der Theorie sind notgedrungen nur zweidimensionale Störungen in Betracht gezogen worden. Die Ergebnisse waren bezüglich der Reynoldsschen Zahlen recht befriedigend, doch ist ohne weiteres zu erwarten, daß die wirklich auftretenden Anfangsstörungen sehr viel mannigfaltiger sein werden. Außerdem interessiert nicht bloß das Verhalten der kleinen Störungen, sondern das Verhalten endlicher Störungen und die Ausbildung der eigentlichen Turbulenz ist praktisch sehr viel wichtiger. Hierfür können nur aus Versuchen weitere Aufschlüsse erwartet werden. Wir haben deshalb in Göttingen eine neue Versuchseinrichtung gebaut, mit der diese Dinge besser als früher beobachtet werden können. Die Versuchseinrichtung ist in Abb. 2, 3 und 4 näher dargestellt. Abb. 2 gibt einen Aufriß und Grundriß, Abb. 3 zeigt den Einlauf des eigentlichen Gerinnes im größeren Maßstab, Abb. 4 einen Querschnitt durch das Gerinne. Besonderer Wert ist auf einen möglichst störungsfreien Einlauf gelegt. Die an der Wand des vorgeschalteten Beruhigungsbehälters entstehenden Wirbel werden durch die in Abb. 3 ersichtlichen Schlitze seitlich abgeführt, so daß das in das Gerinne gelangende Wasser sehr störungsfrei ist. Die Störungen, welche Turbulenz hervorrufen sollen, werden künstlich erzeugt, indem ein kurzes Stück der einen Seitenwand siebartig durchlöchert ausgeführt ist und aus der dahinter befindlichen Kammer sowohl Wasser in die Strömung eintreten wie auch mittels eines Hebers abgesaugt werden kann. Außerdem befindet sich in dieser Kammer ein Keil, der durch ein kleines Maschinchen auf und ab bewegt werden kann und so periodische Störungen hervorruft. Eine sehr einfache und wirkungsvolle Art zu stören ist die, daß man, während das Wasser im Kanal entlangfließt, plötzlich den Heber anstellt. Dadurch wird die stromaufwärts von der Störstelle gebildete Grenzschicht von jetzt ab entfernt. Weiter stromabwärts ist sie aber noch vorhanden; sie wird, da sie langsamer strömt, von der gestörten Strömung eingeholt und zu einem Wirbel aufgerollt. Dieser teilt sich sehr bald und bildet eine unregelmäßige Wirbelgruppe, die sich allmählich immer mehr ausdehnt. Der Vorgang ist kinematographisch festgehalten worden (Vergrößerungen aus dem Film werden im Lichtbild vorgeführt).

Im weiteren Programm unserer Untersuchungen steht ein quantitatives Studium der wellenartigen Störungen zur Nachprüfung der Tollmienschen Theorie, ferner eine genauere Untersuchung des Mechanismus beim Anwachsen einer Einzelstörung zur vollen Turbulenz. Weiter soll die Wirkung einer durch einen kantigen Einlauf oder durch eine künstliche Verengung hervorgerufenen dauernden Störung auf die Turbulenzausbildung und auf die kritische Zahl untersucht werden. Auch der Mechanismus der voll ausgebildeten Turbulenz soll näher studiert werden. Der Apparat gestattet auch, die Seitenwände ein wenig konvergent oder divergent einzustellen, und es ist auch beabsichtigt, den wohl beträchtlichen Einfluß einer schwachen keilförmigen Verengung bzw. Erweiterung auf die kritische Zahl und auf den Turbulenzmechanismus zu untersuchen. 231, 2

3. Strömungswiderstand in rauhen Rohren.

Von *J. Nikuradse* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Der Bericht, der hier gegeben wird, beschäftigt sich mit der Untersuchung von Wasserströmungen in rauhen Rohren. Als Versuchsrohre wurden gezogene Messingrohre von kreisförmigem Querschnitt benutzt. Um eine wohldefinierte Rauhigkeit zu erhalten, wurde Sand bestimmter Körnung an der mit Lack klebrig gemachten Innenwand dadurch befestigt, daß man durch das Rohr zunächst Lack fließen ließ und nach kurzer Trockenzeit das Rohr mit Sand füilte; dann wurde der Sand herausgelassen. Nach 14tägiger Trockenzeit wurde das Rohr nochmals mit Lack gefüllt, wieder entleert und getrocknet. Untersucht wurde nicht nur das Widerstandsgesetz, sondern auch die Abhängigkeit der Geschwindigkeitsverteilung von der relativen Rauhigkeit. Dabei ist die relative Rauhigkeit definiert als Quotient der mittleren Erhebung (k) durch den Rohrhalbmesser (r). Für diese Untersuchungen war es erforderlich, eine solche Versuchseinrichtung zu schaffen, die genauere Messungen ermöglichte. Das Wasser wurde mit Hilfe einer Kreiselpumpe dem Vorratskanal entnommen und in den Wasserkessel gefördert[1]). Aus diesem gelangte es durch das Versuchsrohr in den Vorratskanal zurück. Es wurden gemessen: 1. das Druckgefälle, 2. die Geschwindigkeits-

[1]) Über die Versuchseinrichtung siehe J. Nikuradse, Über turbulente Wasserströmungen in geraden Rohren bei sehr großen Reynoldsschen Zahlen. Vorträge aus dem Gebiete der Aerodynamik und verwandter Gebiete. Herausgegeben von A. Gilles, L. Hopf und Th. v. Kármán, Aachen 1929.

verteilung, 3. die Durchflußmenge, 4. die Temperatur des Wassers. Das Druckgefälle wurde, da Wandanbohrungen hier unverwendbar sind, mit hakenförmigen Röhrchen ermittelt, die parallel zur Strömungsrichtung lagen und seitliche Anbohrungen hatten. Die Geschwindigkeitsverteilung wurde mit einem Pitotrohr von 0,2 mm Innendurchmesser gemessen, das in wagerechter und senkrechter Richtung beweglich war. Die Durchflußmenge bis zur Reynoldsschen Zahl $\Re = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} = 3 \cdot 10^5$ (d = Rohrdurchmesser, $\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit) wurde im Meßbottich ermittelt; die größeren Mengen wurden durch Integration der Geschwindigkeitsverteilung berechnet. Die Temperatur wurde beim Austritt aus dem Geschwindigkeitsmeßapparat gemessen.

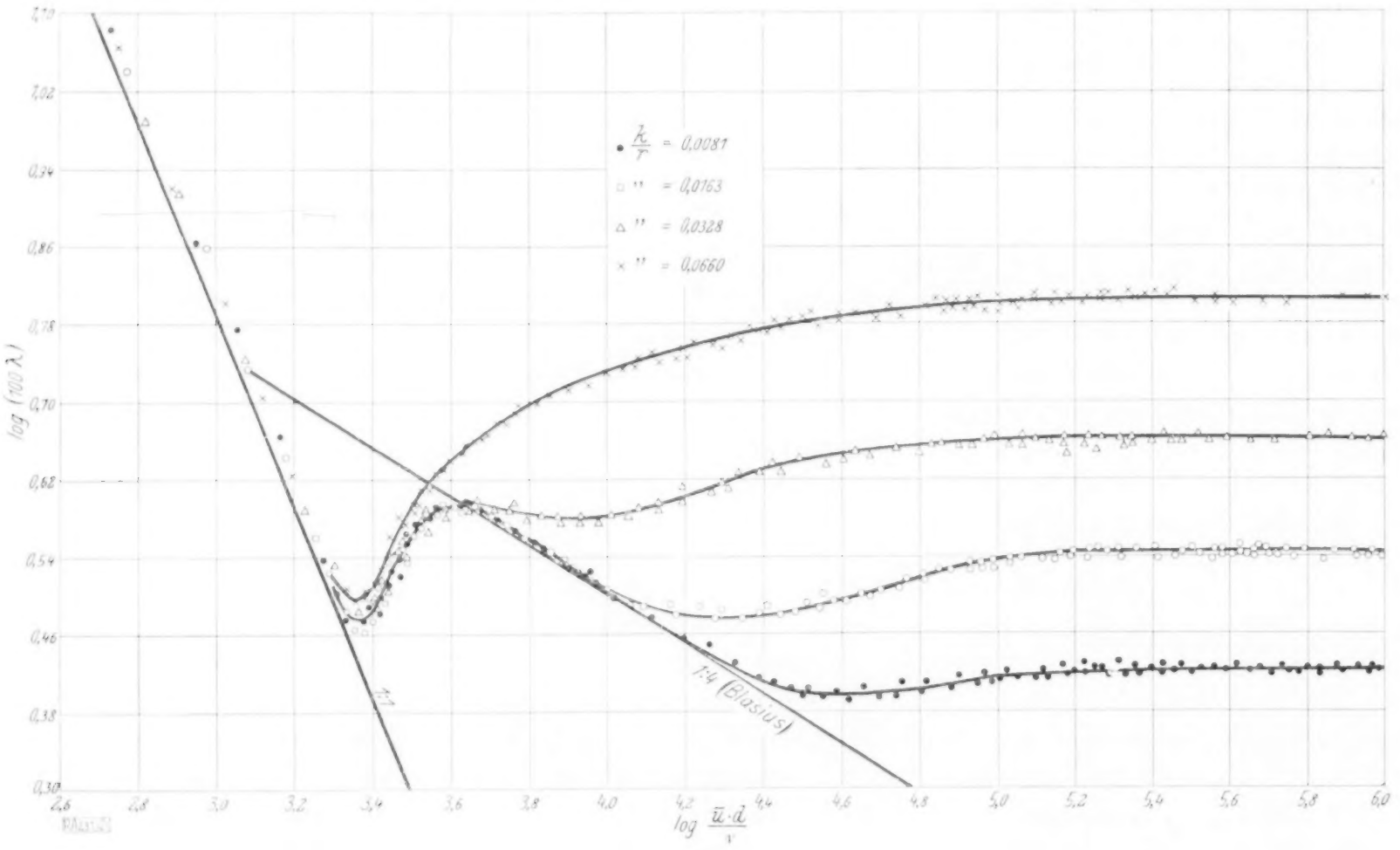


Abb. 1.

In Vorversuchen wurden folgende Fragen untersucht:

1. Es wurde die Anlauflänge durch Messung der Geschwindigkeitsverteilung ermittelt und zu etwa $\frac{x}{d} = 35$ gefunden (x = Entfernung vom Eintrittsquerschnitt, d = Rohrdurchmesser).

2. Es wurde die Reproduzierbarkeit der Versuche geprüft, indem man zwei Rohre von gleichen Dimensionen mit Sand gleicher Korngröße in derselben Weise bearbeitete. Es zeigte sich, daß sich für beide Rohre dieselben Widerstandszahlen ergaben.

3. Indem man die Korngröße und den Rohrdurchmesser in der Weise variierte, daß die relative Rauhigkeit $\frac{k}{r}$ konstant blieb, wurde festgestellt, daß das Reynoldssche Ähnlichkeitsgesetz erfüllt ist.

Die Widerstandszahl λ ist in bekannter Weise dadurch definiert, daß man den Druckabfall auf eine Länge $= d\left(\frac{dp}{dx} \cdot d\right)$ durch die Geschwindigkeitshöhe der mittleren Geschwindigkeit $\overline{q} = \varrho \frac{\bar{u}^2}{2}$ dividiert ($\bar{u}$ = mittlere Geschwindigkeit, ϱ = Dichte). So gelangt man zu der dimensionslosen Widerstandszahl $\lambda = \frac{dp}{dx} \cdot \frac{d}{\overline{q}}$. Diese Widerstandszahl wurde in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl in dem Bereiche von etwa $\Re = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} = 600$ bis zum Wert $\Re = \frac{\bar{u} \cdot d}{\nu} = 1000 \cdot 10^3$ für verschiedene relative Rauhigkeiten untersucht.

Der untersuchte Bereich von Reynoldsschen Zahlen erstreckt sich sowohl über den laminaren wie über den turbulenten Bereich. In der Abbildung ist die Widerstandszahl λ in Abhängigkeit von der Reynoldsschen Zahl aufgetragen. Die ausgezogene Gerade mit der Neigung 1 : 1 bedeutet das Widerstandsgesetz $\lambda = \frac{64}{\Re}$ für laminare Strömung in glatten Rohren. Man erkennt, daß im laminaren Bereich die Widerstandszahl für rauhe Rohre um ein Geringes größer ist als für glatte Rohre. Die kritische Reynoldssche Zahl für sämtliche untersuchten rauhen Rohre liegt zwischen 2160 und 2440, also im gleichen Bereich wie für glatte Rohre.

Die zweite in der Abbildung ausgezogene Gerade bedeutet das Blasiussche Widerstandsgesetz für glatte Rohre bei turbulenter Strömung $\left(\lambda = \frac{0{,}316}{\Re^{1/4}}\right)$. Die verschiedenen von uns untersuchten Rauhigkeiten zeigen in bezug auf das Widerstandsgesetz im turbulenten Bereich ganz verschiedenes Verhalten. Für sehr große Reynoldssche Zahlen hat man bei allen Rauhigkeiten das quadratische Widerstandsgesetz, und zwar gelangt man mit wachsender Reynoldsscher Zahl desto eher in das Gebiet des quadratischen Widerstandsgesetzes, je größer die relative Rauhigkeit ist. In dem Übergangsgebiet, wo also das quadratische Gesetz noch nicht gilt, beobachtet man für kleine Reynoldssche Zahlen zunächst Übereinstimmung mit dem glatten Rohr. Die Abweichung der Widerstandszahl von derjenigen des glatten Rohres tritt bei um so kleineren Reynoldsschen Zahlen ein, je größer die relative Rauhigkeit ist. Die Ergebnisse über die Widerstandszahl für den Bereich, wo das quadratische Gesetz gilt, haben wir verglichen mit dem von v. Kármán[2]) für rauhe Rohre angegebenen Widerstandsgesetz, welches lautet: $\frac{\varkappa\sqrt{2}}{\sqrt{\psi}} = \log\frac{r}{k} + C$, wobei $\varkappa$ eine universelle Konstante ist, die aus den Geschwindigkeitsverteilungen ermittelt wurde, und $\psi = \frac{\tau_0}{\varrho/2 \cdot U^2_{\max}}$ bedeutet (τ_0 = Schubspannung an der Wand, $U_{\max}$ = maximale Geschwindigkeit). Der Vergleich ergibt bei verschiedenen relativen Rauhigkeiten für die Konstante C die Werte 4,3; 4,8 und 4,62.

Außer dem Widerstandsgesetz wurden auch Geschwindigkeitsverteilungen ermittelt und wie bei v. Kármán[2]) dargestellt in der Form $\frac{U-u}{v_*} = f(y/r)$. Dabei bedeutet $v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho}}$, u die jeweilige Geschwindigkeit und y den Abstand von der Rohrachse.

In derselben Weise wie früher bei glatten Rohren haben wir hier aus den gemessenen Geschwindigkeitsverteilungen den bekannten von Prandtl[3]) eingeführten und schon oft mit Erfolg verwandten Mischungsweg berechnet. Es ist nach Prandtl:

$$l = \sqrt{\frac{\tau}{\varrho} : \left(\frac{du}{dy}\right)^2} = v_* : \left|\frac{du}{dy}\right| .$$

Für sehr große Reynoldssche Zahlen, wo ein Einfluß der Zähigkeit nicht mehr vorhanden ist, ergibt sich für rauhe Rohre im wesentlichen der gleiche Verlauf für $\frac{l}{r}$ in Abhängigkeit von $\frac{y}{r}$ wie bei glatten Rohren. 231, 3

4. Spaltverluste an Tragflügeln.

Von *O. Flachsbart* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Gegeben sei ein translatorisch bewegtes mehrfach zusammenhängendes Tragwerk, bestehend aus einem zylindrischen Tragflügel zwischen zwei gleichgroßen, ebenen, parallelen Scheiben (vgl. Definitionsskizze in Abb. 1). Zwischen den Flügelenden und den Scheiben seien beiderseits gleich breite Spalte. Gefragt wird nach dem induzierten Widerstand des Tragwerks in Abhängigkeit von der Spaltweite.

Die Aufgabe hat enge Beziehungen zu einem Problem der strömungstechnischen Praxis. Bei Kaplan- und Propellerturbinen, Schraubenpumpen und Schraubenventilatoren befindet sich zwischen den Schaufelenden des Laufrades und der Gehäusewand ein schmaler Spalt. Durch

[2]) Th. v. Kármán, Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz. Nachr. der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1930.

[3]) L. Prandtl, Über die ausgebildete Turbulenz. Verhandl. d. 2. intern. Kongr. f. techn. Mechanik, Zürich 1926.

diesen Spalt (der vorhanden sein muß, damit das Laufrad sich frei drehen kann) strömt Flüssigkeit, ohne Leistung an das Laufrad abzugeben bzw. von ihm aufzunehmen. Es sind also Leistungsverluste mit dem Spalt verbunden, deren Abhängigkeit von den Konstruktions- und Betriebsgrößen des Laufrades zu kennen, wichtig ist. Ihre theoretische Erfassung stößt aber, wie eine bemerkenswerte Untersuchung von Betz[1]) gezeigt hat, einstweilen auf Schwierigkeiten, und zwar im wesentlichen deshalb, weil man nicht recht übersieht, welche Faktoren den Strömungsvorgang im Spalt entscheidend beeinflussen. Um diese Lücke in unseren Kenntnissen ausfüllen zu können, ist es notwendig, das Spaltproblem in vereinfachter Form zu stellen. Deshalb die anfangs vorgelegte Aufgabe.

Die theoretische Behandlung des Flügels zwischen Scheiben kann sich eng an die Theorie des einzelnen Tragflügels anlehnen. Wie beim Einzelflügel tritt auch beim Flügel zwischen Scheiben ein Druckausgleich zwischen Druck- und Saugseite des Flügels ein. Der damit verbundene Energieverlust äußert sich als induzierter Widerstand. Die Ausgleichsströmung erfolgt bei der Spaltweite Null allein um die Scheiben herum, bei offenen Spalten auch durch die Spalte hindurch. Die durch die Spaltströmung bedingte Vergrößerung des induzierten Widerstandes bezeichnen wir als Spaltverlust. Er ist um so größer, je mehr Flüssigkeit in der Zeiteinheit durch die Spalte hindurchströmt.

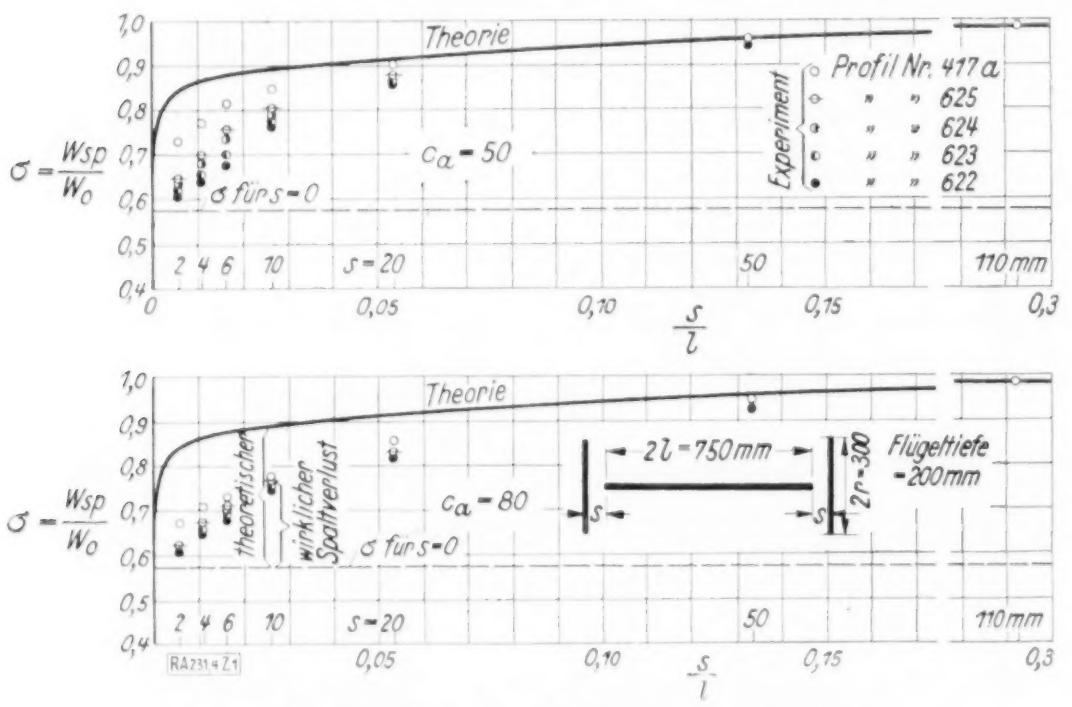


Abb. 1. Spaltverlust des Flügels zwischen Scheiben.
$\frac{\text{Scheibenhöhe}}{\text{Flügelspannweite}} = \frac{2r}{2l} = 0{,}4.$
Wo bei mittleren und großen Spaltweiten die Meßpunkte nahezu bzw. ganz zusammenfallen, ist nur der obere und der untere Meßpunkt bzw. nur ein Punkt eingetragen.

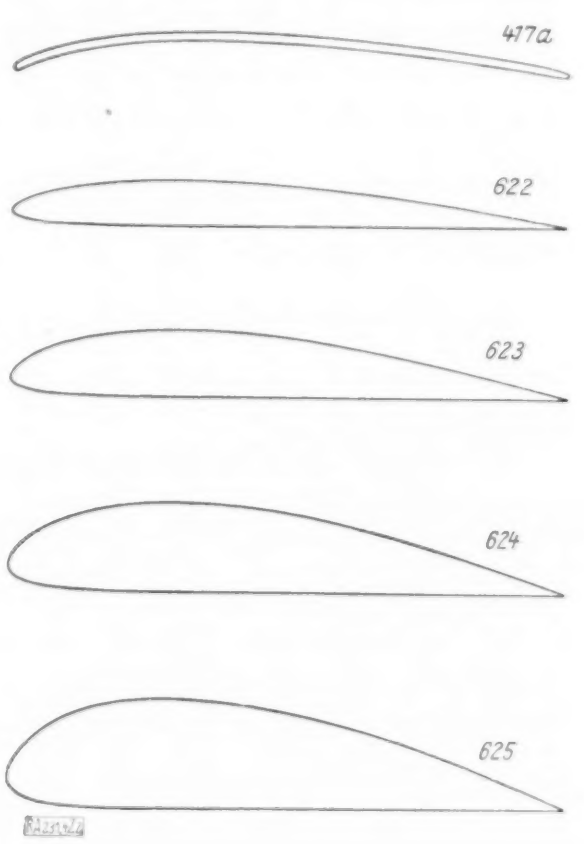


Abb. 2. Untersuchte Flügelprofile.

Auf Grund der Erfahrungen, die man mit der Theorie des einzelnen Tragflügels gemacht hat, kann die theoretische Behandlung des Spalttragwerks auf das Tragwerk geringsten Widerstandes beschränkt werden. Nach bekannten Methoden der Tragflügeltheorie läßt sich dann das dreidimensionale Problem auf ein zweidimensionales der klassischen Hydrodynamik reduzieren: statt die Strömung am Flügel zu betrachten, studiert man die Umströmung der von den tragenden Teilen ausgehenden Unstetigkeitsflächen. Die zur Erledigung dieser Aufgabe erforderlichen Hilfsmittel liefert die Methode der konformen Abbildung. Die Durchführung der Rechnung ist allerdings etwas unbequem, sie führt auf elliptische Integrale.

Ich verzichte hier auf die Wiedergabe von Einzelheiten der Rechnung[2]). Dagegen sei darauf aufmerksam gemacht, daß der Abbildungsprozeß nebenbei die Erledigung einer Reihe von anderen (zum Teil schon früher gelösten) Problemen ziemlich mühelos mitliefert. Es handelt sich, abgesehen von dem „Flügel mit Endscheiben", dessen exakte Lösung man auf diesem Wege findet[3]), um mehrfach zusammenhängende Tragwerke mit gewissen Symmetrieeigenschaften.

[1]) A. Betz, Über die Vorgänge an den Schaufelenden von Kaplanturbinen. In „Hydraulische Probleme", VDI-Verlag, Berlin 1926, S. 161. Herrn Prof. Betz verdanke ich die Anregung zur Beschäftigung mit dem Spaltproblem.

[2]) Eine ausführliche Darstellung wird in einiger Zeit erscheinen.

[3]) Die früher von Betz und Nagel gefundene Näherungslösung erweist sich als gut. F. Nagel, Flügel mit seitlichen Scheiben. Vorläufige Mitt. d. Aerodyn. Versuchsanstalt z. Göttingen. Heft 2, 1924 (nicht im Handel). Ferner III. Lieferung d. Ergebnisse d. Aerodyn. Versuchsanstalt zu Göttingen (München u. Berlin 1927) Abschnitt I. 5: „Der induzierte Widerstand von Flügeln mit Endscheiben".

In Abb. 1 ist das Ergebnis der Rechnung für das Spalttragwerk „Flügel zwischen Scheiben“ eingezeichnet, und zwar für den im Experiment überprüften Fall

$$\frac{\text{Scheibenhöhe}}{\text{Flügelspannweite}} = \frac{2r}{2l} = 0{,}4.$$

Aufgetragen ist über dem Verhältnis $\frac{s}{l}$ der Spaltweite zur halben Flügelspannweite das Verhältnis σ des Widerstandes W_{sp} des Spalttragwerks zum Widerstand W_0 des Flügels allein (Spalt ∞). Man erkennt, was aus verwandten Rechnungen von Grammel und Betz an sich bekannt ist, daß der Widerstand eines Spalttragwerks bei kleinen Spalten stark anwächst.

Die experimentelle Überprüfung des theoretischen Ergebnisses wurde mit den Flügelprofilen der Abb. 2 vorgenommen. Es handelt sich um eine gewölbte Platte (Profil 417a) und um eine Serie von 4 affin verdickten Profilen (Profil 622 bis 625). Die 3 mm dicke gewölbte Platte wurde gewählt, um den Voraussetzungen der Theorie, die mit unendlich dünnen Flügeln rechnet, nahezukommen; die Serie der affin verdickten Profile, um Auskunft über den Einfluß der Flügeldicke zu erhalten. Die Flügeltiefe betrug in allen Fällen 200 mm, die Flügelspannweite 750 mm. Die Seitenscheiben waren ebene Kreisscheiben mit einem Durchmesser gleich dem 1,5fachen der Flügeltiefe. Form und Größe der Scheiben wurden auf Grund der Erfahrungen Nagels bei Versuchen an Flügeln mit Endscheiben[4]) festgelegt.

In Abb. 1 sind der theoretischen Kurve die Ergebnisse der Experimente für 2 verschiedene Werte des Auftriebsbeiwertes c_a gegenübergestellt. Man ersieht daraus folgendes:

1. Für große Spalte stehen die Ergebnisse der Rechnung und des Experiments in praktisch vollständiger Übereinstimmung. Für kleine Spalte liefert die Rechnung zu große Spaltverluste. (Das Resultat steht in Übereinstimmung mit dem Ergebnis der Betzschen Untersuchung über den Spaltverlust bei Kaplanturbinen).

2. Die Differenz zwischen Rechnung und Experiment wird kleiner mit abnehmendem c_a.

3. Eine Abhängigkeit von der Flügeldicke ist innerhalb der Serie der 4 affin verdickten Profile bei kleinen Spalten deutlich zu erkennen. Die σ-Werte gruppieren sich nach der Flügeldicke, jedoch so, daß die dickeren Profile den größeren Spaltverlust liefern. (Erwarten möchte man das Umgekehrte: daß dickere Profile kleineren Spaltverlust haben, da größere Flügeldicke an sich vermehrten Durchflußwiderstand bedeutet.) Die gewölbte Platte 417a, deren Spaltverlust dem theoretischen am nächsten kommt, fügt sich hinsichtlich des Einflusses der Flügeldicke nicht in die Reihe der affin verdickten Flügel. Mit wachsenden Spalten und zunehmendem c_a verschwindet der Profileinfluß mehr und mehr.

Abgesehen von dem nicht ohne weiteres verständlichen Einfluß der Flügeldicke (auf den ich noch zurückkomme) zeigen die Ergebnisse jedenfalls, daß die endliche Flügeldicke nicht für die bei kleinen Spalten beobachtete Differenz zwischen Rechnung und Experiment verantwortlich gemacht werden kann. Um die wirkliche Ursache aufdecken zu können, muß man sich an die Voraussetzung der Tragflügeltheorie erinnern, daß die Ablenkungen, die der Flüssigkeit durch den Flügel erteilt werden, verschwindend klein sind, m. a. W. daß der Belastungsgrad des Flügels (der Auftriebsbeiwert c_a) verschwindend klein ist. In Wirklichkeit sind bei endlichem Auftrieb die Ablenkungen endlich, was zur Folge hat, daß sich statt der von der Theorie angenommenen Potentialströmung um das Flügelende herum eine abgelöste Strömung mit einer sich trichterförmig aufrollenden Trennungsfläche bildet (Abb. 3 links und Abb. 4). Nun weiß man allerdings, daß diese Abweichung für das Tragwerk mit unendlichem Spalt, d. h. für den einfachen Tragflügel praktisch bedeutungslos ist. Beim Tragwerk mit endlichem Spalt liegen die Dinge aber aus folgendem Grunde anders. Man sieht zunächst sofort (vgl. Abb. 1), daß sich der Unterschied zwischen Rechnung und Messung in der Weise aussprechen läßt, daß man sagt: Der wirklich eintretende Spaltverlust ist so, als ob der Spalt etwas kleiner ist. Tatsächlich erfährt nun, wie bereits Prandtl angedeutet hat[5]), die Spaltweite eine Einengung durch die bei der Umströmung des Flügelendes eintretende Ablösung und Wirbelbildung, von der eben die Rede war. An die Stelle der geometrischen Spaltweite tritt eine verkleinerte, aerodynamisch wirksame Spaltweite. Der linke Teil der Abb. 3 zeigt schematisch, wie man sich den Vorgang vor-

[4]) F. Nagel, a. a. O.

[5]) In einer Diskussionsbemerkung zu dem in Fußnote [1]) zitierten Vortrag von Betz, a. a. O. S. 174.

zustellen hat, Abb. 4 gibt den experimentellen Beleg. Der Effekt muß um so stärker sein, je kleiner unter im übrigen gleichen Bedingungen der Spalt, bzw. je größer das c_a ist (ersteres, weil die Spaltverengung prozentual um so weniger bringt, je größer der Spalt ist, letzteres, weil mit größerem c_a größere Ablösungswirbel verknüpft sind). Übereinstimmung zwischen Rechnung und Experiment kann daher bei endlichen c_a-Werten allein für große Spalte erwartet werden; für große und kleine Spalte nur bei verschwindendem c_a. Die Experimente bestätigen diesen Schluß, insbesondere zeigt eine (hier fortgelassene) Auftragung der gemessenen σ-Werte über c_a, daß σ mit abnehmendem c_a tatsächlich gegen den theoretischen Wert geht. Die Abweichungen zwischen Rechnung und Experiment sind also qualitativ verständlich.

Auf das eigentümliche Verhalten der dicken Flügel wirft die folgende Beobachtung Licht. Setzt man auf die freien Enden des dünnen Flügels 417a, und zwar auf die Saugseite, kleine Scheiben, so wächst der Spaltverlust, d. h. es fließt mehr Flüssigkeit durch die Spalte als ohne die aufgesetzten Scheiben. Auf diese Weise läßt sich Rechnung und Experiment auch bei kleinen Spalten und nicht zu großem c_a einigermaßen in Übereinstimmung bringen. Man wird diese auffallende Erscheinung als Analogon zur Wirkung von Ansatzrohren beim Ausfluß aus Gefäßen deuten müssen, allerdings mit dem Unterschied, daß durch die Ver-

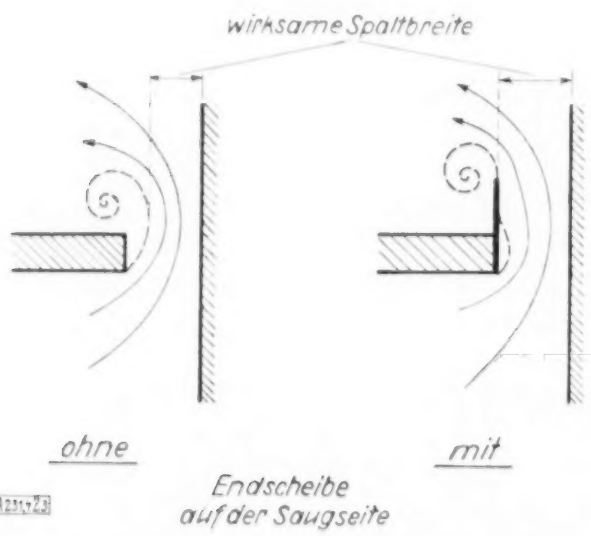


Abb. 3. Schema der Strömung um das Flügelende.

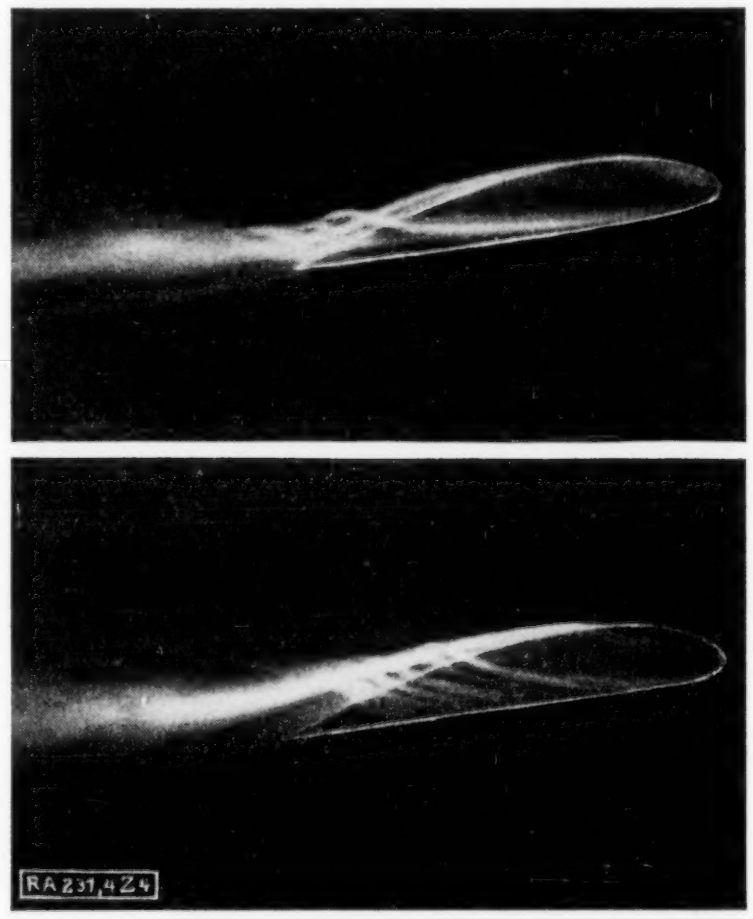


Abb. 4 (nebenstehend). Lichtbild der Strömung um das Flügelende. Profil 624.
Flügeltiefe 200 mm. Wind von rechts.
Oben: Spaltweite ∞ } gleicher Anstellwinkel.
unten: „ 2 mm }
Die dem Leser zugekehrte Seitenscheibe bestand aus Spiegelglas. Die Strömung wurde mit Hilfe von Titantetrachlorid sichtbar gemacht.

längerung des Spaltes (Vergrößerung der Flügeldicke) nicht nur eine beim Eintritt der Flüssigkeit in den Spalt verursachte Kontraktion wieder rückgängig gemacht, sondern gleichzeitig die Ablösung auf der Saugseite beeinflußt wird. Die Verhältnisse sind in Abb. 3 auf der rechten Seite angedeutet. Eine entsprechende Wirkung muß dann eine Verstärkung der Flügeldicke haben, wodurch verständlich wird, daß die dicken Flügel der untersuchten Serie größeren Spaltverlust haben als die dünnen. Daß abgesehen von der Flügeldicke die Profilgestalt von gewissem Einfluß ist, zeigt die Tatsache, daß das Profil 417a sich hinsichtlich seines Spaltverlustes nicht in die Serie der systematisch verdickten Profile einfügt. Die Aufklärung dieser Zusammenhänge können erst neue Versuche bringen.

Der durch aufgesetzte kleine Scheiben hervorgerufene Effekt nimmt übrigens mit wachsendem c_a und größerer Spaltbreite ab. Mit dieser Beobachtung steht in Einklang, daß die Unterschiede im σ der verschieden dicken Flügel mit wachsendem c_a und zunehmender Spaltbreite mehr und mehr verschwinden.

Für die Zwecke der Praxis, der es darauf ankommt, die Spaltverluste klein zu halten, zeigen die zuletzt erwähnten Versuchsergebnisse, daß auf der Saugseite der Flügelenden aufgesetzte kleine Scheiben kein taugliches Mittel zur Herabsetzung des Spaltverlustes sind. Geeignet sind wahrscheinlich Scheiben auf der Druckseite. Entsprechende Versuche sind im Gange.

5. Über eine einfache Geschwindigkeitsregelung für Windstromanlagen.

Von *O. Schrenk* in Göttingen.

Bei kleineren aerodynamischen Versuchsanlagen hat man oft mit Geschwindigkeitsschwankungen erhebliche Schwierigkeiten, da hier die umfangreichen Regelungseinrichtungen, wie sie beispielsweise in größeren Windkanälen verwandt werden, fast stets zu teuer sind. Ein Regelverfahren, das sich im Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung bewährt hat und zugleich billig und leicht anzubringen ist, kann wohl häufig diese Lücke ausfüllen. Es ist die Aufgabe dieses Berichts, vor allem über die mit den bisherigen Ausführungen gesammelten Erfahrungen zu berichten[1]). Der Regler ist im Grunde einfach ein Regulierventil, das an einer Über- oder Unterdruckkammer liegt. Neu daran sind alle Einzelheiten, die das Prinzip für Gebläseanlagen verwendbar machen. Wie die Abbildung — am Beispiel einer Freistrahlanlage — zeigt, besteht der Regler im wesentlichen aus einem Deckel, der mit etwas Spiel während des Betriebs frei im Gleichgewicht über einem Ansatz der Düsenvorkammer schwebt und stets so viel Luft austreten läßt, daß der Druck in der Kammer konstant und der Deckel somit im Gleichgewicht ist. Für die Spalthöhe, bei der der Deckel noch konstant regelt, hat sich bei den bisherigen Ausführungen ein Wert ergeben, den man ganz rund als etwa ein Hundertstel des Deckelumfanges annehmen kann.

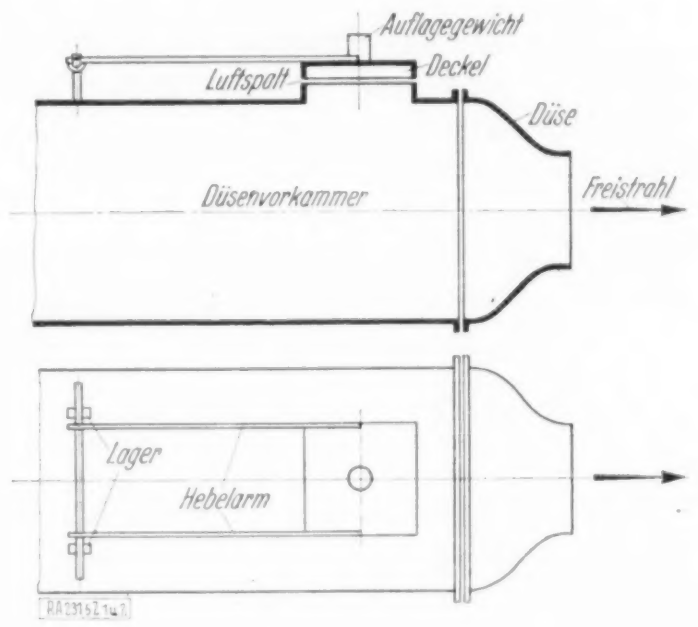


Abb. 1 u. 2.

Die Deckelgröße und der erforderliche Hub hängen, wie erwähnt sei, nicht nur von den Abmessungen der Anlage, sondern auch von der Charakteristik des Gebläses ab; insbesondere braucht ein Gebläse, das bei einer gewissen Änderung der Fördermenge (mit konstant gehaltener Drehzahl) wenig Druckänderung zeigt, größere Flächen und Hübe, als ein anderes mit großer Druckänderung. Bei Drosselzuständen mit verkehrter Charakteristik, für die Menge und Druck sich im gleichen Sinne ändern, sind Deckelregler nicht stabil und daher unbrauchbar. Verkehrte Charakteristik ist aber meßtechnisch wegen zu großer Unruhe der Strömung sowieso kaum brauchbar und daher bedeutungslos; sie tritt mitunter bei zu starker Drosselung dadurch auf, daß die Strömung an den Flügeln des Gebläses abreißt. Zur Vermeidung von ungeeigneten Deckelgrößen ist eine Vorausberechnung des Reglers, wie sie in der früheren Veröffentlichung ausgegeben ist, unbedingt nötig.

Außer dem ersten hat bisher keiner der ausgeführten Regler sofort vollständig befriedigt, aber alle konnten durch geeignete Gegenmaßnahmen auf die verlangte Genauigkeit gebracht werden.

Die Schwierigkeiten, die zunächst auftreten, sind meist folgende: 1.) der Deckel steht nicht, oder nicht in allen Lagen, stabil, 2.) er ist sehr unruhig und verursacht kurzperiodige zusätzliche Geschwindigkeitsschwankungen, 3.) die Regelung ist inkonstant, das bedeutet, daß sich mit verändertem Deckelhub, wie er etwa durch Schwankungen der Drehzahl oder der aerodynamischen Belastung verursacht wird, ein etwas anderer Druck einstellt. Dabei kann sich eine mit dem Deckelhub steigende oder fallende Regelcharakteristik ergeben.

Die Abhilfemaßnahmen gegen diese Schwierigkeiten sind, im Prinzip wenigstens, ebenfalls in der früheren Veröffentlichung schon mitgeteilt. Allerdings konnten die Erfahrungen inzwischen erheblich erweitert werden.

Die Genauigkeit von zweien der bisher ausgeführten Regeler, darunter dem unseres 1,2-m-Windkanals, ist so groß, daß man mit den gewöhnlichen Manometern über eine sehr lange Zeit hin überhaupt keine Schwankungen im Druck abliest. D. h. daß die Regler höchstens 0,5 vT betragen können. Bei anderen Ausführungen[2]) ergaben sich Regelschwankungen, die wenigstens nicht größer sind als die der sonstigen Regler von Windstromanlagen, nämlich zwischen $\pm$ 0,5 vT und $\pm$ 1,5 vT.

Die Erfahrungen mit dem neuen Regler unseres 1,2-m-Windkanals haben, abgesehen von der noch außenstehenden Dauererprobung, über lange Zeit gezeigt, daß sich die Deckelregelung auch für größere Anlagen eignet. Konstruktiv ist dieser Deckel allerdings wegen seiner Größe etwas anders ausgeführt als die Abbildung zeigt. Er arbeitet mit Anschlag-

[1]) Eine erste Mitteilung über das Regelverfahren befindet sich im Ingenieurarchiv, I, 1930, auf Seite 350.

[2]) Vgl. z. B. die demnächst im Ingenieurarchiv erscheinende Veröffentlichung von Herrn Dr. Gruschwitz über „Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg".

kontakten, an denen eine bisher schon vorhandene grobere Drehzahlregelung des Antriebsmotors liegt, die einsetzt, wenn der Hubbereich des Deckels nicht genügt. In dieser Weise ist es auch möglich, vollautomatische Windkanalregelung zu bauen, die aus einem Deckel als Feinregler und einer Grobregelung mit Hilfe der Drehzahl bestehen. Bedenken wegen einer Beeinflussung der Hauptströmung im Windkanal durch das seitliche Austreten der Regelluft waren, wie Kontrollversuche gezeigt haben, bei den geringen Regelmengen (im Mittel etwa 2 vH) ganz unberechtigt. Es sei aber erwähnt, daß diese Beeinflussungen vielleicht nicht ganz zu vernachlässigen sind, wenn die Regelmenge im Verhältnis der gesamten Fördermenge einen größeren Anteil ausmachen. Praktisch sind aber wohl Regelmengen, die wesentlich größer sind als die hier angegebenen, kaum nötig. 231, 5

6. Überfallversuche in verschiedener Modellgröße.

Von *F. Eisner* in Berlin.

I. Anlaß, Ergebnisse, Folgerungen. Bei Gelegenheit der auftragsgemäßen Untersuchung eines im Ems-Fluß vorhandenen rundkronigen Wehrdammes auf seine Abflußmenge Q bei verschiedenen Ober- und Unterwasserständen wurden genügend breite Wehrausschnitte in fünf verschiedenen Modellmaßstäben mit über 600 Einzelversuchen untersucht. Auch am Ems-Wehr selbst sind noch Messungen geplant, die naturgemäß geringere Genauigkeit haben werden als die Laboratoriumsmessungen. Die Modelle waren alle aus Zement hergestellt. Bei der Auswertung (Bezeichnungen s. unten) nach

$$\mu = \frac{Q/b}{h \cdot \sqrt{2\,g\,h}} = f\left(\frac{h}{w}\right) \text{ oder } f_1\left(\frac{h}{h+w}\right) \text{ bezw. } \mu' = \frac{Q/b}{h' \cdot \sqrt{2\,g \cdot h'}} = f'\left(\frac{h'}{w}\right) \text{ oder } f_1'\left(\frac{h'}{h'+w}\right)$$

zeigte sich ein systematischer Einfluß der Modellgröße in dem Sinne, daß die Leistungsfähigkeit mit der Größe der Ausführung stieg.

Für die an sich bei derartigen Überfällen bekannte Erfahrungstatsache einer „eher günstigeren“ Leistungsfähigkeit der Großausführung gegenüber einem kleinen Modell fehlte bisher eine

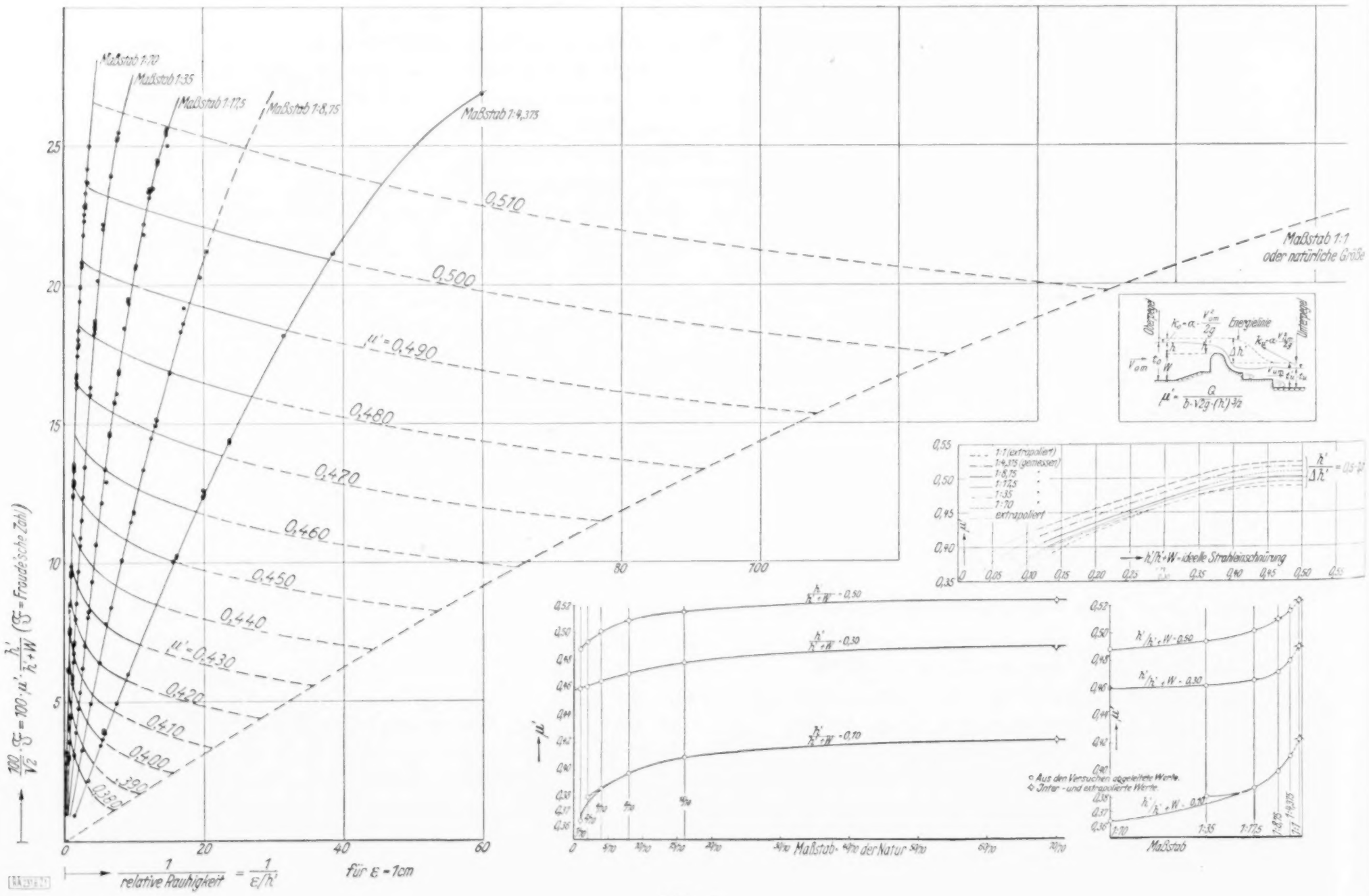


Abb. 1.

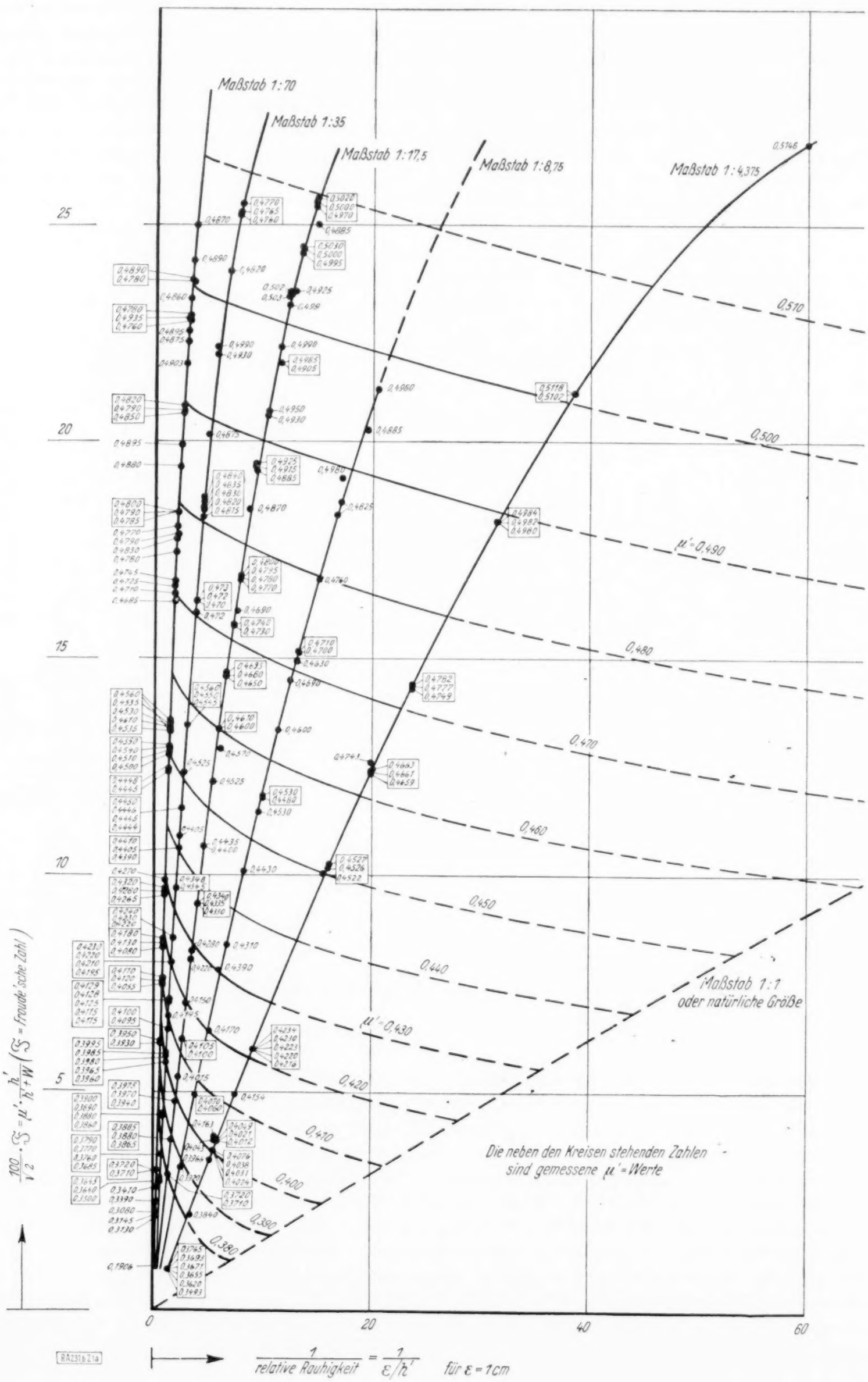


Abb. 1 a.

Text zu Abb. 1 u. 1 a. Untersuchung eines Ausschnittes aus dem festen Wehrrücken von Hanekenfähr (Ems) in verschiedenen Modellmaßstäben für $\frac{h'}{\Delta h'} \leq 1{,}0$.

begründete zahlenmäßige Abschätzungsmöglichkeit. Das neue Auswertungsverfahren nach bestimmten, den Vorgang beeinflussenden dimensionslosen Kennzahlen, das sich für scharfkantige und rundkronige, gelüftete und ungelüftete, „vollkommene“ und „unvollkommene“ Überfälle (neue Definition s. unten) in gleicher Weise als allgemein brauchbar erweist, liefert eine solche Abschätzungsmöglichkeit. Es bestätigt sich damit die für das Wasserbauversuchswesen wichtige Erkenntnis, daß man die Modelle nicht beliebig klein machen darf, wenn das Ergebnis für die Großausführung mit einer bestimmten prozentualen Genauigkeit erhalten werden soll. Zur eigentlichen Meßgenauigkeit (persönlichen und Instrumentfehlern) kommt dieser durch die Art des physikalischen Vorgangs bedingte Einfluß der Modellgröße noch hinzu. Die vorliegende Untersuchung ist damit ein erster Schritt zu dem schon von H. Krey stets erstrebten Ziel, aus der für die Großausführung gewünschten Genauigkeit je nach dem Charakter der Aufgabe den kleinstzulässigen Modellmaßstab zu ermitteln. Mit der Modellgröße steigen die Versuchskosten, steigt aber auch — sofern nicht das Messen schwieriger wird — die Genauigkeit des Ergebnisses, für die man ein Mindestmaß zu fordern hat.

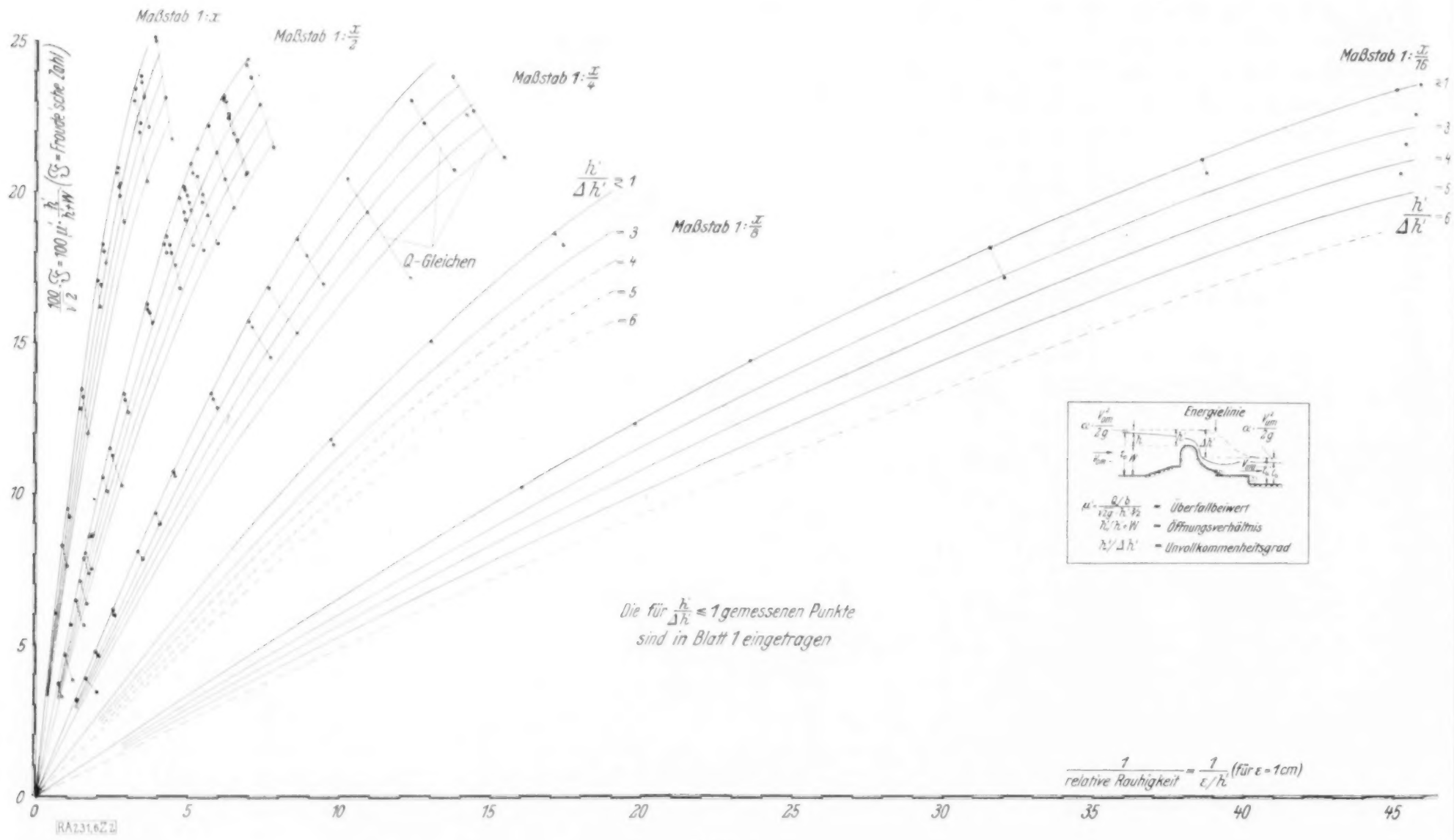


Abb. 2.

II. Übersicht über das Auswertverfahren. Die Berechnung der Überfallzahl für ein scharfkantiges Wehr bei vollkommen gelüftetem Strahl und tiefem (einflußlosem) Unterwasser kann im Anschluß an die von Helmholtz begründete Theorie der freien Strahlen unter bestimmten, meist hinreichend erfüllten Voraussetzungen durch folgenden Schluß geschehen[1]): Die Übereinstimmung zwischen Rechnung und Messung scheint die Zulässigkeit der Annahme zu gewährleisten, daß die Strahlablenkung (Senkung) infolge der Schwere die Kontraktion nicht wesentlich beeinflußt (die den gesamten Vorgang auslösende Wirkung der Schwere (Potentialdifferenz) muß natürlich in Ansatz gebracht werden). Man kann dann die Anordnung beim Überfall als die untere Hälfte des Bildes eines Ausflusses aus einem wagerecht liegenden, symmetrischen Gefäß mit entsprechender Wandungsgestaltung an der Ausflußmündung ansehen. Über diese v. Misessche Überlegung hinausgehend, soll nachstehend als die der Symmetrieachse des Ausflußgefäßes entsprechende Linie die sogenannte Energielinie angesehen werden, die um die als Bezugslänge gewählte Höhe $h' = h + a \cdot \frac{v_z^2}{2g}$ über der höchsten Stelle der Wehrkrone verläuft (h = Überfallhöhe über der Wehrkrone; $v_z = \frac{Q/b}{(h+w)}$ = mittlere Zu-

[1]) v. Mises, Berechnung von Ausfluß- und Überfallzahlen. Z. d. V. D. I. 1917, S. 447 ff.

flußgeschwindigkeit im (rechteckigen) Zulaufgerinne, mit $w =$ Wehrhöhe stromauf über Sohle und $b =$ Gerinnebreite; h und v_z sind im gleichen Querschnitt zu messen; $\alpha =$ Geschwindigkeitshöhenausgleichswert, der die Geschwindigkeitsverteilung im Querschnitt berücksichtigt). Der Wehreinbau schränkt die ursprüngliche (halbe) Gefäßweite $h' + w$ auf h' ein, so daß $\frac{h'}{h' + w} =$ Öffnungsverhältnis eine wichtige Größe ist. Bei gegebener Wehrform genügt die Angabe der einen Länge w zur Kennzeichnung der Modellgröße. Bezogen auf die ideelle Öffnungsweite h' und die aus dieser Länge gebildete

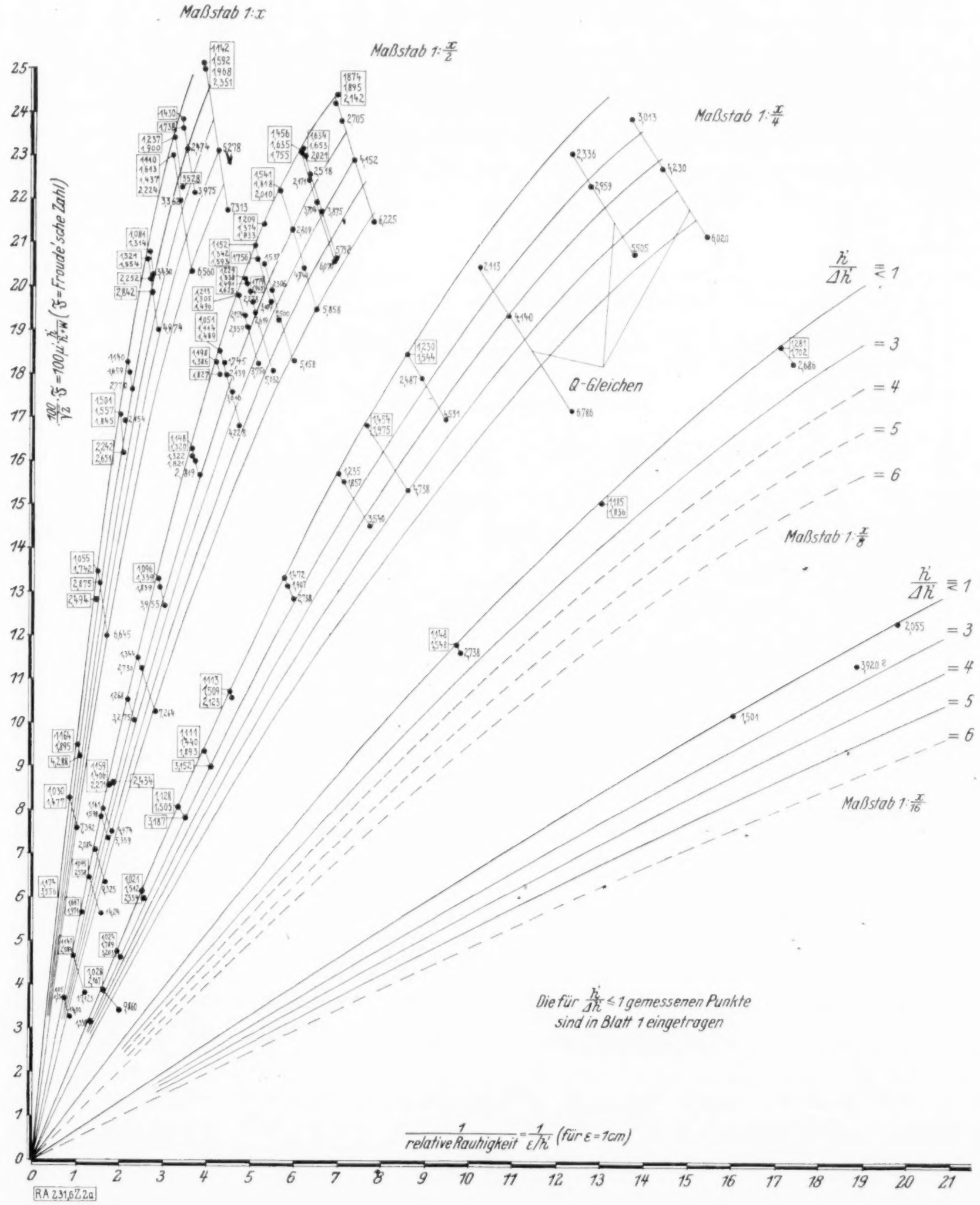


Abb. 2a.

Text zu Abb. 2 und 2a. Vergleichende Modellversuche an rundkronigen Überfallwehren in verschiedenen Maßstäben. Kurven gleichen Wertes $\frac{h'}{\Delta h'}$.

ideelle Geschwindigkeit $\sqrt{2g \cdot h'}$ setzen wir stets in gleicher Weise, also auch für den unvollkommenen, rundkronigen usw. usw. Überfall, an:

$$\frac{Q}{b} = \mu' \cdot h' \cdot \sqrt{2g \cdot h'} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1),$$

mit μ' als dimensionsloser Überfallzahl und haben nun die Abhängigkeit des μ' von den jeweils kennzeichnenden Dimensionslosen zu ermitteln, die hier im voraus formal zusammengestellt sei:

$$\mu' = \mu' \left(\frac{h'}{h' + w} ; \mathfrak{F}; \Re; \mathfrak{W}; \frac{\varepsilon}{h'} ; \frac{h'}{\Delta h'} \ldots \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Hierbei berücksichtigt: $\mathfrak{F}$ = Froudesche Zahl den Einfluß der Schwerkraft; $\Re$ = Reynoldssche Zahl den Einfluß der Reibung bei Geschwindigkeitsunterschieden benachbarter Fäden, sofern dies hier von Einfluß sein sollte (also etwa bei Walzenbildung beim unvollkommenen Überfall); $\mathfrak{W}$ = Webersche Zahl den Einfluß der Oberflächenspannung T (Wasser gegen Luft) bei stärkerer Oberflächenkrümmung eines gelüfteten Strahles; ε (= Länge) die absolute, $\frac{\varepsilon}{h'}$ die relative Wandrauhigkeit der Wehrkrone bei rundkronigem Wehr; $\frac{h'}{\Delta h'}$ = Unvollkommenheitsgrad $= \frac{1}{\Delta h'/h'}$ bedeutet den in h'-Einheiten gemessenen Energielinienhöhenfall zwischen Ober- und Unterwasser und begreift zunächst summarisch die beim gewellten oder mit Deckwalze o. ä. versehenen Strahl eintretenden Energieumsetzungen in sich (s. jedoch unten). Solange das Unterwasser tief steht und den Abflußvorgang hinsichtlich der Größe von μ' nicht beeinflußt (sicher für $\frac{h'}{\Delta h'} \leqq 1$), heiße — im Gegensatz zur bisher üblichen Definition — der Überfall: vollkommen, anderenfalls unvollkommen. Bei dem untersuchten rundkronigen Wehr liegt die Grenze zwischen vollkommenem und unvollkommenem Überfall etwa bei $\frac{h'}{\Delta h'} =$ 1,5 bis 2,0 (s. Abb. 2), was nach einer Bemerkung von R. Seifert[2]) wohl damit zusammenhängt, daß die Strahloberfläche beim Abfall über die gerundete Wehrkrone zunächst tiefer absinkt, als weiter unterhalb der Unterwasserspiegellage entspricht.

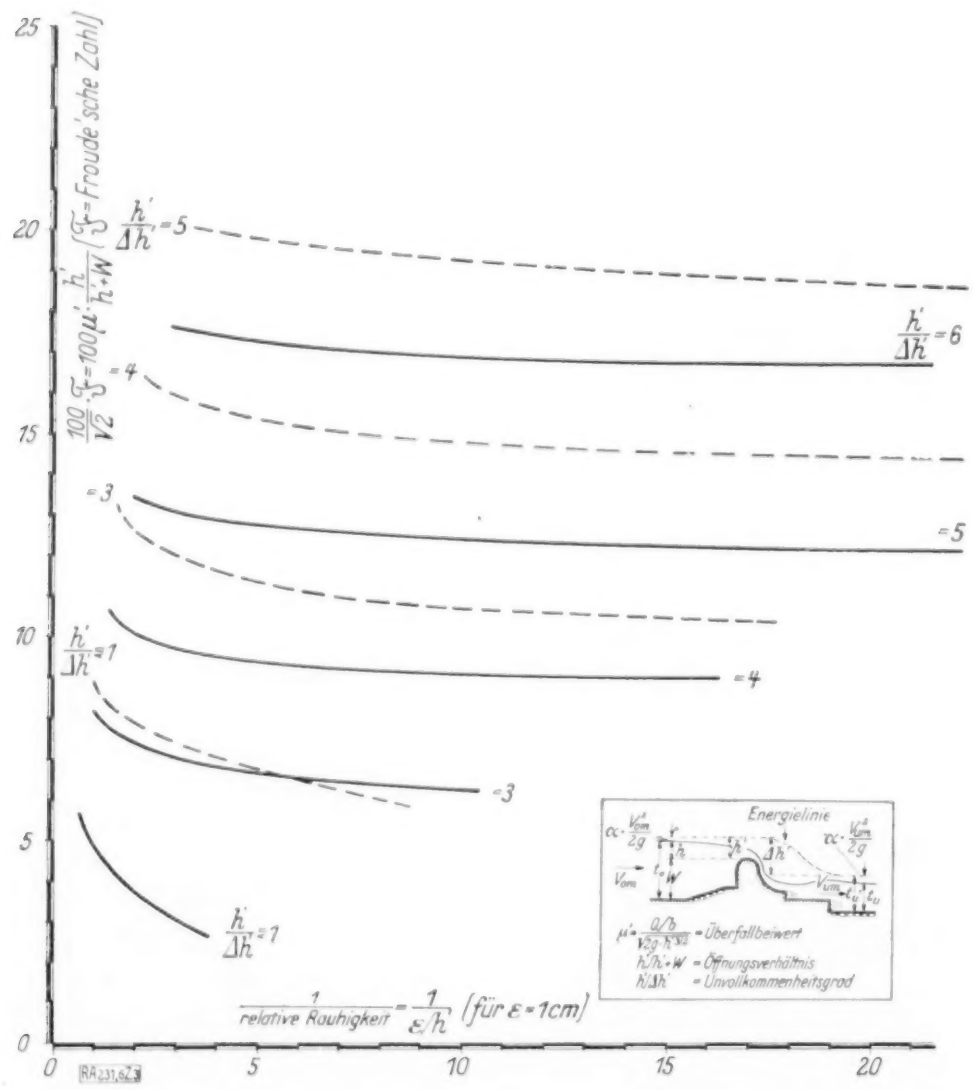


Abb. 3. Vergleichende Modellversuche an rundkronigen Überfallwehren in verschiedenen Maßstäben. Kurven $\mu' = 0{,}390$ (ausgezogen) und $\mu' = 0{,}420$ (gestrichelt) für verschiedene $\frac{h'}{\Delta h'}$.

Als Bezugsgeschwindigkeit, die in die Ausdrücke für $\mathfrak{F}$ und $\Re$ einzuführen ist, wird gemäß der Wahl von h' als Bezugslänge die Größe $v' = \frac{Q/b}{h' + w}$ gewählt; dann ergibt sich

$$\mathfrak{F} = \frac{v'}{\sqrt{g\,h'}} = \frac{Q/b}{\sqrt{g\,h' \cdot (h' + w)}} = \sqrt{2} \cdot \mu' \cdot \frac{h'}{(h' + w)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3a),$$

so daß hierin das Öffnungsverhältnis schon enthalten ist. Ferner:

$$\Re = \frac{v'\,h'}{Z} = \frac{Q/b}{(h' + w)} \cdot \frac{h'}{Z} = \frac{\sqrt{2\,g}}{Z} \cdot \mu' \cdot \left(h'\right)^{3/2} \cdot \frac{h'}{h' + w} \quad \ldots \ldots \quad (3b)$$

mit Z = kinematischer Zähigkeit.

[2]) Vgl. auch Kreys Ejektorwirkung.

Die Reynoldssche Zahl ist — wie bekannt — beim vollkommenen Überfall nicht von merklichem Einfluß. Dies zeigte sich auch darin, daß[3]) keine Gesetzmäßigkeit gefunden wurde beim Auftragen der ($\mathfrak{F}$-$\mathfrak{R}$)-Abhängigkeit der Ergebnisse an den 3 kleinsten bei einheitlicher Temperatur untersuchten Modellen zusammen mit den Ergebnissen am nächstgrößeren bei höherer Temperatur und am größten, nicht in Berlin, sondern im Walchensee-Forschungsinstitut im Winter bei wesentlich niedrigeren Temperaturen untersuchten Modell. Für den Nachweis eines etwaigen Einflusses der Reynoldsschen Zahl beim unvollkommenen Überfall reichen die Meßergebnisse leider nicht aus. — Dagegen ergaben sich die in den Abbildungen 1 bis 3 dargestellten Abhängigkeiten $\mu'\left(\mathfrak{F}; \frac{h'}{\Delta h'}; \frac{\varepsilon}{h'}\right)$ für das rundkronige und die in Abb. 4 dargestellte Abhängigkeit μ' ($\mathfrak{F}$, $\mathfrak{W}$) für das scharfkantige Wehr mit vollkommenem, vollkommen gelüftetem Überfall. In letzterer Darstellung sind auch die durch Umrechnung aus der Helmholtz-Kirchhoff-v. Misesschen Rechnung sich ergebenden μ' eingetragen. Da in dieser Theorie die Oberflächenspannung nicht berücksichtigt ist, können sie nur mit den für größere $\frac{1}{\mathfrak{W}} = \frac{h'}{\sqrt{T/\gamma}}$ gemessenen μ' verglichen werden. Die theoretischen μ'-Gleichen sind Parallele zur Abszissenachse; die Abweichungen von den gemessenen sind äußerst gering[4]), teils nach oben, teils nach unten.

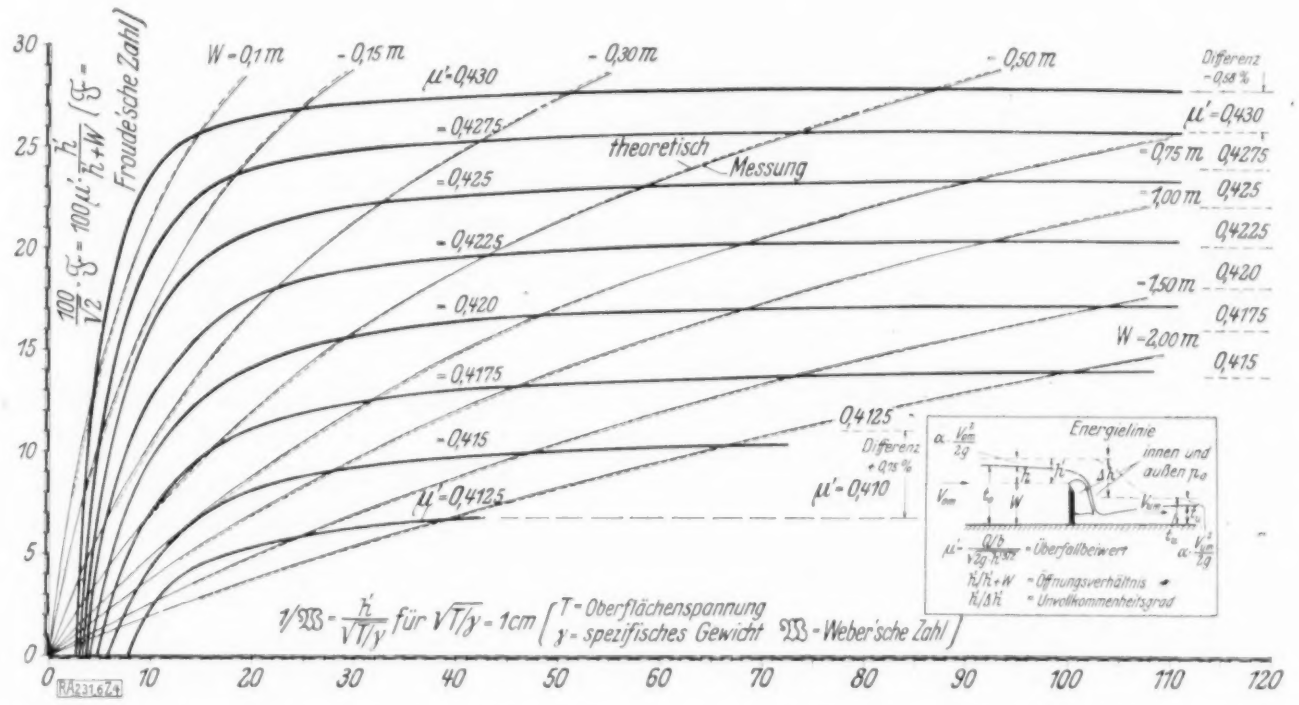


Abb. 4. Vergleichende Überfallversuche an scharfkantigen Plattenwehren mit verschiedenen Wehrhöhen. Kurven gleichen Wertes μ'. Eigene Versuche und Formel Rehbock 1913 (ausgezogen). Theoretisch nach Helmholtz-Kirchhoff-v. Mises (gestrichelt).

In einer Darstellung μ' über $\frac{h'}{h'+w}$ entsprechen im allgemeinen den rundkronigen Wehren nach unten, den scharfkantigen Wehren nach oben offene, gekrümmte Linien.

Um die hier — mangels besserer Kenntnis — zunächst behauptete jeweils alleinige Abhängigkeit von $\frac{\varepsilon}{h'}$ bezw. $\frac{\sqrt{T/\gamma}}{h'}$ sicherzustellen bezw. um Besseres an diese Stelle zu setzen, sind weitere Versuchsreihen mit geänderter relativer Räuhigkeit und geänderter Oberflächenspannung (z. B. nach dem Vorgehen von Isarn[5])) erforderlich; der eine Einfluß verzögert, der andere fördert die Wassermengenleistungsfähigkeit.

Weitere Einzelheiten der Begründung sowie der theoretischen und praktischen Schlußfolgerungen sind einer besonderen Veröffentlichung vorbehalten, die in Kürze als Mitteilung der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, geplant ist. Hier sollen auch Angaben über Versuche mit anderen Wehrformen und über Geschwindigkeitsmessungen an verschiedenen Stellen im Strahl gemacht werden. Es wird ferner gezeigt, daß die Auftragung nach den genannten Dimensionslosen es gestattet, diejenigen Gebiete eindeutig abzugrenzen (einschl. der doppelt überdeckten instabilen Übergangsgebiete), in denen beim unvollkommenen Überfall ein Abfluß mit gewelltem Unterwasser oder ein solcher mit Deckwalze usw. usw. auftritt. — Eine in diesem Zusammenhang entstandene, entsprechende Darstellung der gegenseitigen Abhängigkeit des Schleppwiderstandes (bezogen auf die Tonne Deplacement)

[3]) Genaueres s. in der in Vorbereitung befindlichen ausführlichen Veröffentlichung.
[4]) Der Maßstab der Zeichnung, die den Verlauf der μ' ($\mathfrak{F}$-$\mathfrak{W}$)-Kurven möglichst gut zeigen sollte, täuscht etwas in dieser Hinsicht.
[5]) Isarn, Journal de Physique IV (1875), S. 167.

bezw. des Widerstandsbeiwertes eines Schiffes oder Gleitbootes und der Froudeschen sowie der Reynoldsschen Zahl in einer dreiachsigen Darstellung mit den Koordinaten $f(\widehat{\delta}); f(\Re); \frac{W}{D}$ bezw. ζ hat sich auch bei vergleichenden Modellversuchsreihen von Schiffsmodellfamilien bewährt und scheint brauchbare Schlüsse hinsichtlich der Übertragung von den Modellen auf die Natur zuzulassen; hierüber soll gesondert vor der Schiffbautechnischen Gesellschaft berichtet werden[6]). 231, 6

7. Zur Theorie der Strömung um einen Kreiszylinder bei sehr kleinen Reynoldsschen Zahlen.

Von *John W. Maccoll* in London.

Die folgende Arbeit gibt einige vorläufige Ergebnisse der Aufgabe, eine Lösung der Bewegungsgleichungen zu erhalten, wenn die Trägheitsglieder teilweise in die Gleichungen eingeführt werden. Indem mit der Strömung bei alleiniger Wirkung der Zähigkeit begonnen wird, führt man die Wirkung der Trägheit der Flüssigkeit schrittweise ein und erhält dadurch mehrere Änderungen im Charakter der Strömung. Wenn die Rechnung weit genug durchgeführt wird, so ist es wahrscheinlich, daß die große Lücke zwischen der Theorie der rein zähen Strömungen und der Theorie für die Flüssigkeiten mit verschwindender Zähigkeit stark verkleinert wird.

Da es nicht möglich ist, die Grenzbedingungen für stationäre, zwei-dimensionale Strömung in einer zähen Flüssigkeit von unendlicher Ausdehnung zu erfüllen — zum mindesten mit der Stokesschen Annäherung — wird es notwendig, die Flüssigkeit äußerlich zu begrenzen. Die Wirkung der Ausdehnung dieser äußeren Begrenzung muß im späteren Teil dieser Untersuchung näher betrachtet werden.

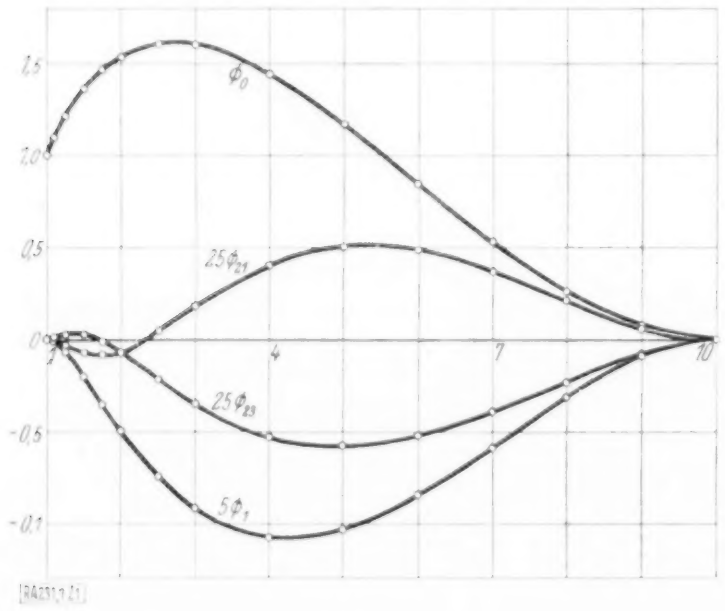


Abb. 1.

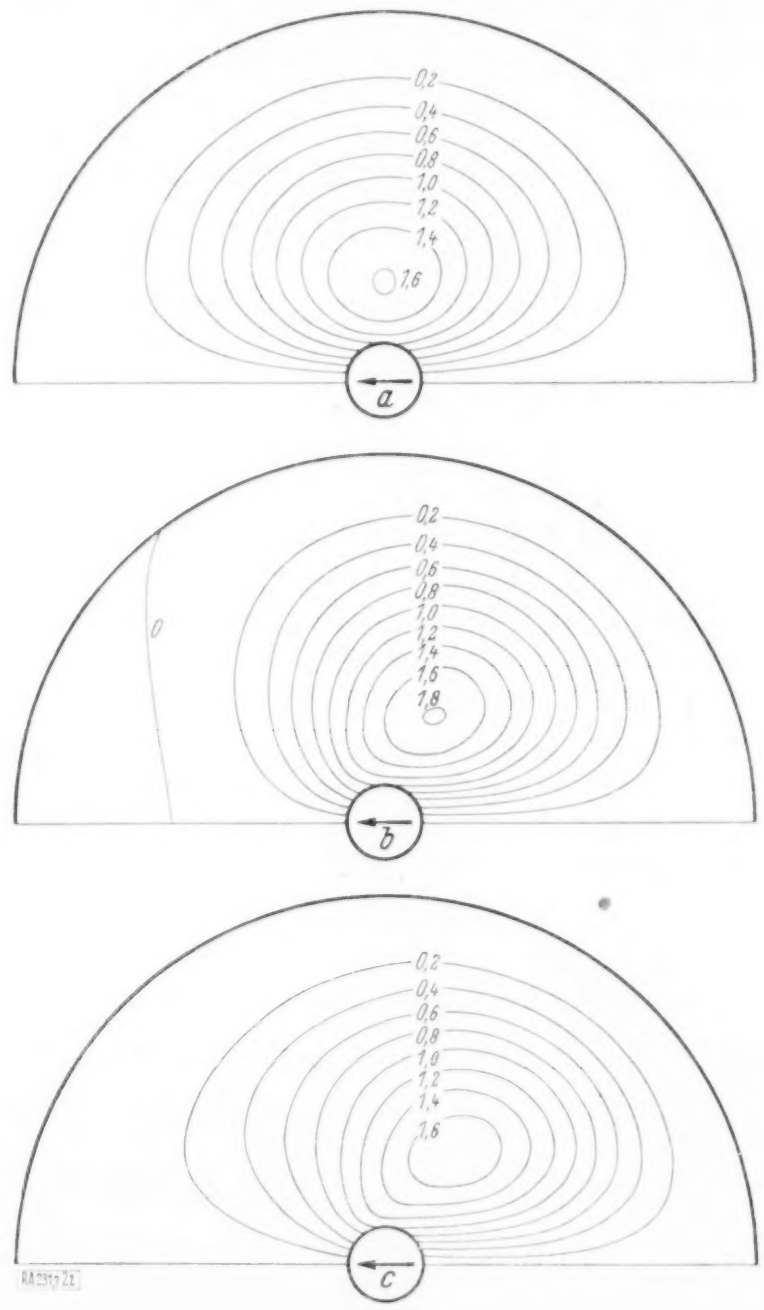


Abb. 2.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir die Bewegung der Flüssigkeit, die durch die gleichförmige Bewegung eines Kreiszylinders verursacht wird. Die Flüssigkeit ist begrenzt durch eine zweite zylindrische Oberfläche vom zehnfachen Durchmesser des bewegten Zylinders. Der Mittelpunkt des festen Koordinatensystems liegt im Zentrum des äußeren Zylinders und die Strömung wird als stationär betrachtet, während der bewegliche Zylinder durch den Koordinatenmittelpunkt wandert.

Es seien u und v die Radial- bezw. Tangentialkomponenten der Geschwindigkeit in einem Punkt.

Die Strömungsfunktion ψ sei durch folgende Gleichungen definiert:

$$u = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \Theta}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

[6]) s. Eisner, Diskussion zu Vortrag Akimoff, Tagung der Schiffbautechnischen Gesellschaft 1931; Jahrbuch S. T. G. 1932.

Dann ist die Differentialgleichung der stationären Strömung in dimensionsloser Form:

$$\Delta\,\Delta\,\psi = R \cdot \left[\frac{\partial\,\psi}{\partial\,r} \cdot \frac{\partial}{r \cdot \partial\,\Theta}\,\Delta\,\psi - \frac{\partial\,\psi}{r \cdot \partial\,\Theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\,r}\,\Delta\,\psi\right]$$

wo

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\,r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\,r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\,\Theta^2} \text{ ist.}$$

$R = \frac{U\,a}{\nu}$ ist die Reynoldsschen Zahl, wobei U die Geschwindigkeit des beweglichen Zylinders, a sein Radius und ν die kinematische Zähigkeit ist.

Mit Cowley und Levy nehmen wir an, daß $\psi = \sum_0 \psi_n \cdot R^n$ ist. Setzen wir diesen Ansatz in die allgemeine Gleichung ein, so erhalten wir eine Reihe von Differentialgleichungen, die sukzessive gelöst werden können. Die erste Gleichung dieser Reihe ist die, die von Stokes in seiner Untersuchung zäher Flüssigkeiten verwendet wurde.

Die allgemeine Form der Lösung kann geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\psi = {} & [\Phi_0(r) \cdot \sin\Theta] \\ & + [\Phi_1(r) \cdot \sin\Theta\cos\Theta] \cdot R \\ & + [\Phi_{21}(r) \cdot \sin\Theta + \Phi_{23}(r) \cdot \sin^3\Theta] \cdot R^2 + \ldots .\end{aligned}$$

Die vier Funktionen $\Phi(r)$ sind analytisch bestimmt worden und ihre Werte für das vorliegende Beispiel sind in Abb. 1 angegeben. Es soll bemerkt werden, daß die ψ-Reihe bei kleinen Reynoldsschen Zahlen genügend stark konvergiert.

Die drei Strömungsbilder der Abb. 2 sind aus den Kurven der Abb. 1 gewonnen. Die Bilder stellen dar:

a) Die Strömung bei einer unendlich kleinen Reynoldsschen Zahl, wobei die Lösung allein von ψ_0 abhängig ist. Sie resultiert allein aus der Wirkung der Zähigkeit; die Geschwindigkeit des Zylinders ist so klein, daß die Trägheit der Flüssigkeit keine merkbare Wirkung hervorruft.

b) Die Strömung bei $R = 5$, wobei zwei Glieder der Gleichung berücksichtigt werden. Die Bewegung ist jetzt unsymmetrisch. Vor dem Zylinder, in der Nähe der äußeren Umrandung, erscheint eine sekundäre Strömung bei einem R größer als 3,44. Oberhalb dieser Grenze ist diese Annäherung nicht mehr gültig. Es wird bemerkt, daß hinter dem Zylinder Tendenz zum Totwasser vorhanden ist.

c) Die Strömung bei $R = 5$, wobei jedoch die Glieder mit R^2 berücksichtigt sind. Die Sekundärströmung von Fall b ist verschwunden. Die Strömung vor dem Zylinder ist mit Ausnahme der Nähe der Oberfläche praktisch gleich der Strömung bei zähigkeitsloser Flüssigkeit. Das Totwasser hinter dem Zylinder ist ausgesprochener als im Falle b.

Die vorliegenden Ergebnisse berechtigen zu der Annahme, daß die verwendete Methode zu weiteren und mehr praktischen Ergebnissen führen könne. Obschon die Rechnungen weiterhin schwierig sind, besonders für die höheren Glieder der Potenzreihe, scheint die Lösung nicht unmöglich zu sein und wird anscheinend vereinfacht, wenn die äußere Umrandung zwar stark ausgeweitert wird, aber nicht ins Unendliche rückt. 231, 7

8. Neuere Versuchsergebnisse über das plastische Verhalten der Metalle.

Von *K. Hohenemser* in Göttingen.

Die große Bedeutung einer versuchsmäßig begründeten mathematischen Plastizitätstheorie insbesondere für das Materialprüfungswesen ist immer wieder betont worden. Trotzdem lagen bisher maßgebende Versuche nur in bezug auf die spannungsbeschränkende Bedingung vor, welche bei kombinierten Spannungszuständen an die Stelle der Grenzspannung (Fließspannung, Streckgrenze) bei reinem Zug oder Druck tritt. Obwohl über den Zusammenhang der Verzerrungen und der Spannungen bei plastischen Deformationen eine Reihe einander z. T. widersprechender Hypothesen aufgestellt worden sind, gab es keine Versuche bei mehrachsigen Spannungszuständen, welche man zum Vergleich hätte heranziehen können. Diese Lücke ist durch Arbeiten aus dem Göttinger Institut für angewandte Mechanik zu einem Teil ausgefüllt worden.

Ein vollständiger Ansatz der Kontinuumsmechanik enthält folgende Gleichungsgruppen:

Allgemeingültige Gleichungen: { Gleichgewichtsbedingungen, Kontinuitätsbedingung.

Stoffgleichungen: { Zustandsgleichung, mittlerer Druck = Funktion der Volumdehnung. Deviatorgleichung, Zusammenhang zwischen dem volumtreuen Verzerrungsanteil und dem Spannungsdeviator (mittlerer Druck ist Null).

Für die plastizierbaren Stoffe kann man in erster Näherung die Volumdehnung vernachlässigen, in zweiter Näherung als Zustandsgleichung einen linearen Zusammenhang zwischen mittlerem Druck und Volumendehnung annehmen. Es werden zunächst rein formal die Möglichkeiten für die Stoffgleichungen isotroper Körper zusammengestellt, wenn man lediglich die einfachsten berücksichtigt, nämlich diejenigen, welche sich im Falle reinen Schubes auf die lineare Beziehung

$$\tau + c_1 \dot{\tau} + c_2 \gamma + c_3 \dot{\gamma} + c_4 = 0$$

reduzieren; hierin ist τ die Schubspannung, γ die Schiebung, der Punkt bedeutet Ableitung nach der Zeit. Folgende 6 z. T. bekannten Körper fallen unter obige Klasse:

$$\tau = \mu \dot{\gamma} \quad \text{zähe Flüssigkeit} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$\tau - \tau_0 = \mu \dot{\gamma} \quad \text{Binghamscher Körper} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$\tau = a \gamma \quad \text{elastischer Körper} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\tau - \tau_0 = a \gamma \quad . \quad (4)$$

$$\tau = \mu \dot{\gamma} - \frac{\mu}{\beta} \dot{\tau} \quad \text{Maxwellscher Körper} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$\tau - \tau_0 = \mu \dot{\gamma} - \frac{\mu}{\beta} \dot{\tau} \quad . \quad (6)$$

τ_0 ist die Grenzschubspannung, oberhalb deren die Gültigkeit der betreffenden Gleichungen beginnt. Aus den Stoffgleichungen (2), (4) und (6), welche τ_0 enthalten, werden wir die Gleichungen für die typisch „plastischen" Stoffe, bei denen die Bewegung geschwindigkeitsunabhängig ist, gewinnen, μ, a, $\frac{\mu}{\beta}$ sind Stoffkonstanten: Zähigkeitszahl, Gleitmodul bzw. Verfestigungszahl, Relaxationszeit. Die Versuche über die spannungsbeschränkende Bedingung bei plastischen Verformungen legen es nahe, bei der tensoriellen Verallgemeinerung der obigen Gleichungen an Stelle des Gliedes $\tau - \tau_0$ den Ausdruck

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|}} \left(\sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|} - \tau_0\right)$$

zu verwenden. Hierin ist $|\Sigma_{0\mathrm{II}}|$ der Betrag der zweiten Invarianten des Spannungsdeviators Σ_0. Die Tensorgleichungen für die Körper 2, 4 und 6 heißen dann

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|}} \left(\sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|} - \tau_0\right) = 2 \mu \dot{E}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2')$$

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|}} \left(\sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|} - \tau_0\right) = 2 a E_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4')$$

$$\frac{\Sigma_0}{\sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|}} \left(\sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|} - \tau_0\right) = 2 \mu \left(\dot{E}_0 - \frac{\dot{\Sigma}_0}{2 \beta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6')$$

E_0 ist der volumtreue Anteil des Verzerrungstensors. Wenn man in den Gl. (2'), (4'), (6') mit μ bzw. a nach Null geht, folgt entweder $\Sigma_0 = 0$, oder

$$\left.\begin{aligned} \lambda \Sigma_0 &= \dot{E}_0 \\ \lambda \Sigma_0 &= E_0 \\ \lambda \Sigma_0 &= \dot{E}_0 - \frac{\dot{\Sigma}_0}{2 \beta} \end{aligned}\right\} \sqrt{|\Sigma_{0\mathrm{II}}|} = \tau_0 \left\{\begin{aligned} &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7) \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8) \\ &. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9) \end{aligned}\right.$$

wo $\lambda = \frac{0}{0}$ jeden Wert annehmen kann. Die Gl. (7) kennzeichnet den Saint-Venant-Misesschen Körper, (8) den Haar-Kármán-Henckyschen und (9) den Prandtl-Reußschen Körper. Für den Sonderfall, daß ein Spannungszustand mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

vorliegt, werden bei Vernachlässigung der Volumdehnung die Gl. (7), (8) und (9) zu

$$\left.\begin{aligned} \lambda s &= \dot{e} \\ \lambda t &= \dot{g} \end{aligned}\right\} \text{ oder } \frac{s}{t} = \frac{de}{dg} \qquad \left.\begin{aligned} \lambda s &= e \\ \lambda t &= g \end{aligned}\right\} \text{ oder } \frac{s}{t} = \frac{e}{g} \qquad \left.\begin{aligned} \lambda s &= \dot{e} - \dot{s} \\ \lambda t &= \dot{g} - \dot{t} \end{aligned}\right\} \text{ oder } \frac{s}{t} = \frac{d(e-s)}{d(g-t)} \qquad \left.\begin{aligned} &\\ &\\ &\end{aligned}\right\} s^2 + t^2 = 1 \qquad \left\{\begin{aligned} &\\ &\\ &\end{aligned}\right.$$

. . . . . (7′)

. . . . . (8′)

. . . . . (9′)

hierin ist $e = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$, $g = \frac{\gamma}{\gamma_0}$, $s = \frac{\sigma}{\sigma_0}$, $t = \frac{\tau}{\tau_0}$, wo ε_0 und σ_0 entsprechend Abb. 1 genommen sind, analog γ_0 und τ_0. Der Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Spannungen während irgendeiner Verformung wird so dargestellt, daß in jedem Punkt des „Formänderungsweges“ in dem $e-g$-Diagramm der „Spannungsvektor“ mit den Komponenten s und t eingetragen wird, der die Länge 1 hat (Abb. 2). Bei Körper 7′ fällt der Spannungsvektor dauernd in die Richtung

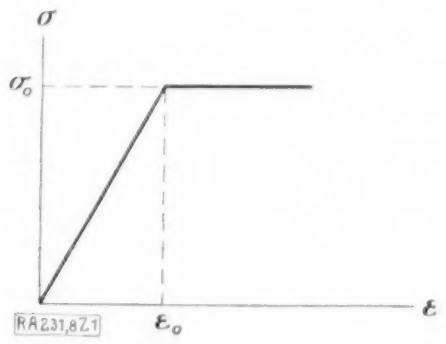


Abb. 1.

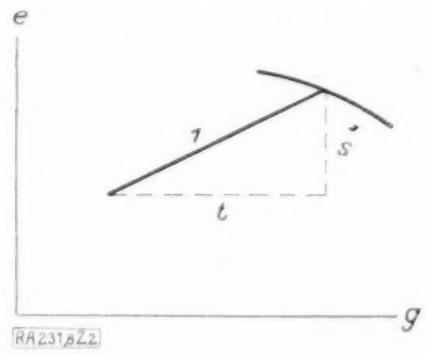


Abb. 2.

der Tangente an den Formänderungsweg, bei Körper 8′ geht der Spannungsvektor durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, während man die Spannungsvektoren nach Körper 9′ dadurch erhalten kann, daß man mit einem Beilplanimeter von der Fahrarmlänge 1 die „Schleppkurve“ zu der Formänderungskurve konstruiert, der Fahrarm ist dann an jeder Stelle identisch mit dem Spannungsvektor. Diese Tatsache ist unmittelbar aus der zweiten Form der Gl. (9′) zu erkennen.

Die Versuche an dünnwandigen gezogenen und tordierten Stahlrohren zeigen, daß der Körper 9 das plastische Verhalten von Stahl verhältnismäßig am besten wiedergibt, doch treten systematische Abweichungen auf, welche durch einen neuen Ansatz z. T. berücksichtigt werden können. Neben Versuchen, bei denen infolge der kleinen Formänderungen die Verfestigung vernachlässigt werden konnte, so daß die Voraussetzung der Körper 7, 8 und 9 in dieser Hinsicht angenähert erfüllt war, wurden auch die Verfestigungserscheinungen bei kombinierten Spannungszuständen gesondert untersucht. Bei Verformungen, welche unter ähnlich veränderlichem Spannungstensor erfolgen, ergeben sich einfache Gesetzmäßigkeiten, es ist dann die Verfestigung als skalare Größe anzusehen, und es besteht ein Zusammenhang von der Form

$$|\Sigma_{0\mathrm{II}}| = f(|E_{0\mathrm{II}}|).$$

Im übrigen muß auf die verschiedenen z. T. noch unveröffentlichten Arbeiten von K. Hohenemser und W. Prager in dieser Zeitschrift und auf die demnächst erscheinende Göttinger Dissertation von R. Schmidt verwiesen werden. 231, 8

9. Beitrag zur Berührung gewölbter Oberflächen beim ebenen Formänderungszustand[1].

Von *C. Weber* in Dresden.

Für ein System, bestehend aus zwei prismatischen Körpern mit zwischenliegender Walze, ist die Zusammendrückung zu finden, und zwar der Unterschied gegenüber der Zusammendrückung des Systemes ohne Zwischenwalze.

Drückt auf die Halbebene $y \geqq 0$ eine Walze mit der Kraft P, so erhält man (H. Hertz) eine Druckstrecke $2a$ mit elliptischer Druckverteilung. Der Spannungszustand ist gegeben durch

$$\sigma_x = \varphi + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad \tau_{xy} = -y\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \sigma_y = \varphi - y\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

mit $$\varphi = -p\,\Re\left(\sqrt{1-\frac{z^2}{a^2}} + i\frac{z}{a}\right), \quad P = \frac{\pi}{2}\,p\,a\,.$$

In der Druckstrecke erhält man infolge der Verschiebungen die Krümmung des Randes

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2\,p\,(1-\nu^2)}{E\,a}\,.$$

Es wird $$a^2 = \frac{8\,P\,(1-\nu^2)\,r}{\pi \quad E} \qquad (r\text{–Walzenhalbmesser}).$$

Für die Walze wird der Spannungszustand gefunden durch Überlagerung der drei Spannungszustände

1. Halbebene $y \geqq -r$ mit elliptisch verteilter Druckkraft P,
2. Halbebene $y \leqq r$ „ „ „ „ P,
4. Gleichmäßige allseitige Zugbelastung $\dfrac{P}{\pi\,r}$.

Man erhält hieraus die Zusammendrückung

$$\frac{4\,P}{\pi}\frac{1-\nu^2}{E}\left(\ln\frac{4\,r}{a} - \frac{1}{2}\right).$$

Für den prismatischen Körper von der Breite b erhält man eine Näherungslösung, indem man die Halbebene im Abstande b periodisch durch Druckkräfte P belastet, dann eine der Einzelkräfte durch eine auf die Druckstrecke elliptisch verteilte Kraft ersetzt und einen Streifen von der Breite b so herausschneidet, daß diese Kraft in die Mitte kommt. Dieser Streifen hat nur eine geringfügige Seitenspannung. Die Zusammendrückung wird für den Streifen (entsprechend für einen prismatischen Körper des Systemes)

$$\frac{2\,P}{\pi}\frac{1-\nu^2}{E}\left(\ln\frac{b}{\pi\,a} + \frac{1}{2}\right).$$

Die Lösung wird noch verbessert, indem durch weitere Überlagerungen die seitliche Spannung des Streifens aufgehoben wird. Zur Berechnung der Verbesserung ist eine allmähliche Näherung des Spannungszustandes eines Rechteckes bei symmetrischer Belastung erst allgemein durchgeführt, dann für das gegebene System spezialisiert. Die Lösung für den Unterschied der Zusammendrückung des gegebenen Systemes und eines Systemes ohne Zwischenwalze wird

$$\delta = \frac{4\,P}{\pi}\frac{1-\nu^2}{E}\ln\left(\frac{b}{1{,}85\,P}\frac{E}{1-\nu^2}\right). \qquad 231,\ 9$$

10. Beiträge zur Statik und Dynamik der Rechteckplatte.

Von *Harry Schmidt* in Köthen.

1. Vor einiger Zeit habe ich[2] die Durchbiegung einer vierseitig frei aufliegenden Rechteckplatte unter dem Einfluß einer gleichförmigen Lastverteilung mit rechteckig berandeter Angriffsfläche berechnet. Es bereitet nun keinerlei prinzipielle Schwierigkeiten, auf Grund

[1] Ausführliche Arbeit in einer späteren Nr. dieser Zeitschrift.

[2] H. Schmidt, Ztschr. f. Phys. 68, 423, 1931. Wegen der Übertragung auf eingespannte Platten vgl. eine in dieser Zeitschrift erscheinende Arbeit.

des gleichen Verfahrens auch den Fall einer beliebig geradlinig begrenzten Lastangriffsfläche zu erledigen. Jede solche Fläche läßt sich nämlich zunächst in Dreiecksgebiete zerlegen, deren jedes wiederum seinerseits als algebraische Summe von drei Sektorflächen aufgefaßt werden kann, d. h. von solchen Flächen, die von zwei von einem Punkt ausgehenden Halbgeraden berandet sind (vgl. Abb. 1, in der die Summe der beiden Sektorflächen I und II nach Subtraktion der Sektorfläche III in die schraffiert gezeichnete Dreiecksfläche übergeht). Man

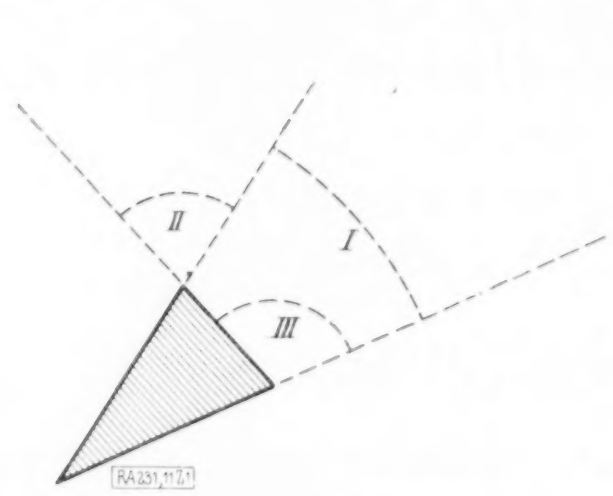


Abb. 1.

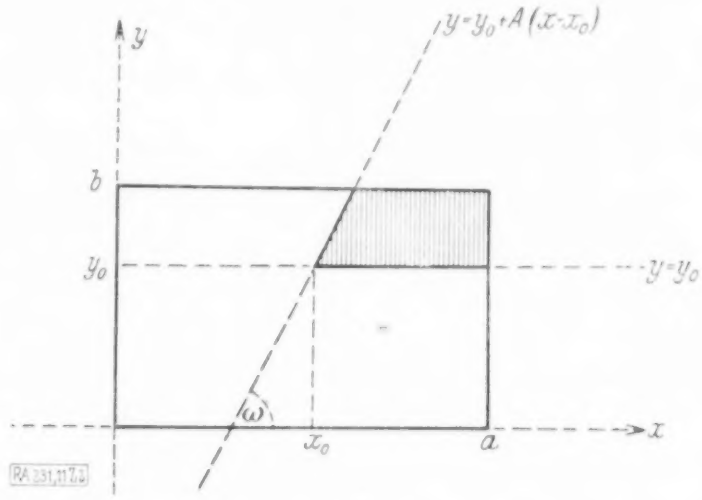


Abb. 2.

überzeugt sich leicht davon, daß die Beschränkung auf den in Abb. 2 dargestellten Sonderfall mit spitzem Winkel ω ausreichend ist, um alle in Frage kommenden Möglichkeiten zu erfassen. Die Durchbiegung $w(x, y)$ hat alsdann der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{N}\cdot p(x, y)$$

mit

$$p(x, y) = \begin{cases} p_0 \text{ in } B, \\ 0 \text{ in allen übrigen Punkten} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

zu genügen, wobei N die Biegungssteifigkeit der Platte und p_0 den auf die Flächeneinheit bezogenen Betrag der in der Sektorfläche B angreifenden Belastung bedeuten. Wegen der bekannten, für jedes $a_0 > 0$ bestehenden Relation

$$\frac{1}{2\pi i}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{\tau z}}{z}\,dz = \begin{cases} 1 \text{ für } \tau > 0, \\ 0 \text{ für } \tau < 0 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

gilt nun

$$p(x, y) = \frac{p_0}{(2\pi i)^2}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{(y-y_0)\zeta}}{\zeta}\,d\zeta\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{[A(x-x_0)-(y-y_0)]z}}{z}\,dz$$

oder

$$p(x, y) = \frac{p_0}{(2\pi i)^2}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-y_0\zeta}}{\zeta}\,d\zeta\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-[Ax_0-y_0]z}}{z}\cdot e^{Az\cdot x+(\zeta-z)\cdot y}\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit $A = \operatorname{tg}\omega$, so daß auf Grund des linearen Superpositionsprinzips

$$w(x, y) = \frac{p_0}{N}\cdot\frac{1}{(2\pi i)^2}\cdot\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-y_0\zeta}}{\zeta}\,d\zeta\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}\frac{e^{-[Ax_0-y_0]z}}{z}\cdot u(x, y; z, \zeta)\,dz \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

wird, unter $u(x, y; z, \zeta)$ die den Randbedingungen

$$\Big[u(x, y;\ z, \zeta)\Big]_{x=0} = \Big[u(x, y;\ z, \zeta)\Big]_{x=a} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_{x=a} = 0,$$

$$\Big[u(x, y;\ z, \zeta)\Big]_{y=0} = \Big[u(x, y;\ z, \zeta)\Big]_{y=b} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{y=0} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]_{y=b} = 0$$

genügende Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = e^{Az\cdot x+(\zeta-z)\cdot y}$$

verstanden. Die Konstruktion dieser Funktion $u(x, y; z, \zeta)$ ist mühelos möglich[3]), und (4) läßt sich dann auf Grund einer früher[4]) bewiesenen Verallgemeinerung von (2) explizite auswerten. Die Rechnung führt zur Unterscheidung der beiden in Abb. 3 und 4 dargestellten Fälle $A(a-x_0)+y_0 \leqq b$ und $A(a-x_0)+y_0 \geqq b$; setzen wir $w(x, y)=\frac{p_0}{N}\cdot W(x, y)$, so wird im ersten Fall

$$W(x,y)=\begin{cases} W_0^{(1)}(x,y)+W_1(x,y) & \text{für } 0 \leqq y \leqq y_0, \\ W_0^{(1)}(x,y)+W_2(x,y) & \text{für } y_0 \leqq y \leqq A(a-x_0)+y_0, \\ W_0^{(1)}(x,y) & \text{für } A(a-x_0)+y_0 \leqq y \leqq b, \end{cases}$$

hingegen im zweiten Fall

$$W(x,y)=\begin{cases} W_0^{(1)}(x,y)+W_0^{(2)}(x,y)+W_1(x,y) & \text{für } 0 \leqq y \leqq y_0, \\ W_0^{(1)}(x,y)+W_0^{(2)}(x,y)+W_2(x,y) & \text{für } y_0 \leqq y \leqq b. \end{cases}$$

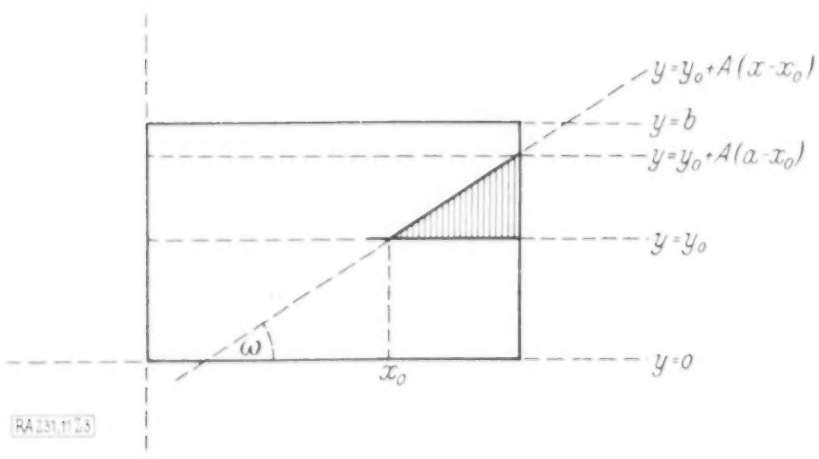


Abb. 3.

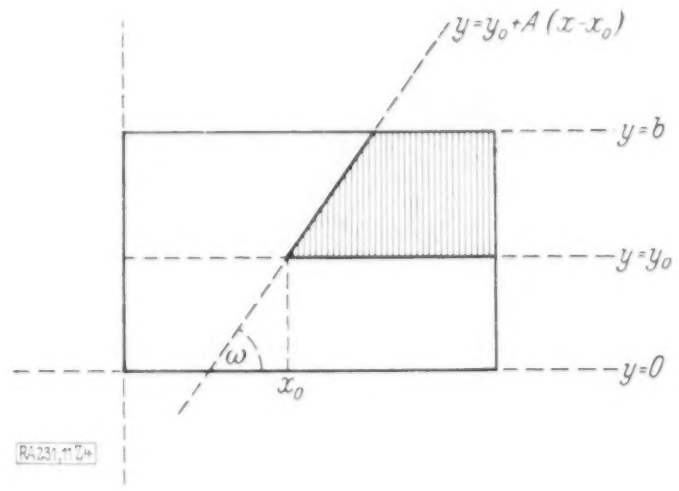


Abb. 4.

Hierin bedeuten

$$W_\varkappa(x,y)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu\cdot\sin(a_\mu x)}{a\cdot a_\mu^3\cdot(1+A^2)}\cdot\left\{\frac{\psi_{\mu 1}^{(\varkappa)}(y)}{a_\mu\cdot(1+A^2)}+\psi_{\mu 2}^{(\varkappa)}(y)\right\}\quad(\varkappa=1,2)$$

sowie

$$W_0^{(1)}(x,y)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu\cdot\sin(a_\mu x)}{a\cdot a_\mu^3(1+A^2)}\cdot\left\{\left(\frac{\mathfrak{L}_{\mu 1}^{(1)}}{a_\mu(1+A^2)}+\mathfrak{L}_{\mu 2}^{(1)}\right)\cdot\frac{\mathfrak{Sin}[a_\mu(b-y)]}{\mathfrak{Sin}(a_\mu b)}\right.$$
$$\left.+\mathfrak{L}_{\mu 3}^{(1)}\cdot\frac{y\cdot\mathfrak{Cof}(a_\mu b)\cdot\mathfrak{Sin}[a_\mu(b-y)]-(b-y)\cdot\mathfrak{Sin}(a_\mu y)}{\mathfrak{Sin}^2(a_\mu b)}\right\}$$

und

$$W_0^{(2)}(x,y)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu\cdot\sin(a_\mu x)}{a\cdot a_\mu^3(1+A^2)}\cdot\left\{\left(\frac{\mathfrak{L}_{\mu 1}^{(2)}}{a_\mu(1+A^2)}+\mathfrak{L}_{\mu 2}^{(2)}\right)\cdot\frac{\mathfrak{Sin}(a_\mu y)}{\mathfrak{Sin}(a_\mu b)}\right.$$
$$\left.+\mathfrak{L}_{\mu 3}^{(2)}\cdot\frac{(b-y)\cdot\mathfrak{Cof}(a_\mu b)\cdot\mathfrak{Sin}(a_\mu y)-y\cdot\mathfrak{Sin}[a_\mu(b-y)]}{\mathfrak{Sin}^2(a_\mu b)}\right\},$$

wobei $a_\mu=\frac{\mu\pi}{a}$ gilt und folgende Abkürzungen benutzt wurden:

$$\psi_{\mu 1}^{(1)}(y)=2(1+2A^2)\cdot\{\mathfrak{Cof}[a_\mu\{A(a-x_0)-(y-y_0)\}]-\mathfrak{Cof}[a_\mu(y-y_0)]\}$$
$$-2A^3\cdot\{1-(-1)^\mu\cdot\cos(a_\mu x_0)\}\cdot\mathfrak{Cof}[a_\mu(y-y_0)]$$
$$-(-1)^\mu A(1+3A^2)\cdot\sin(a_\mu x_0)\cdot\mathfrak{Sin}[a_\mu(y-y_0)];$$

$$\psi_{\mu 2}^{(1)}(y)=-\{A(a-x_0)-(y-y_0)\}\cdot\mathfrak{Sin}[a_\mu\{A(a-x_0)-(y-y_0)\}]$$
$$+A^2(y-y_0)\cdot\{1-(-1)^\mu\cdot\cos(a_\mu x_0)\}\cdot\mathfrak{Sin}[a_\mu(y-y_0)]$$
$$+(y-y_0)\cdot\mathfrak{Sin}[a_\mu(y-y_0)]+(-1)^\mu\cdot A(y-y_0)\sin(a_\mu x_0)\cdot\mathfrak{Cof}[a_\mu(y-y_0)];$$

[3]) Vgl. hierzu die in der vorhergehenden Fußnote zitierte Arbeit.
[4]) H. Schmidt, Ztschr. f. Phys. 39, 474, 1926.

$$\psi_{\mu_1}^{(2)}(y) = 2(1+2A^2)\cdot\{\mathfrak{Cof}[a_\mu\{A(a-x_0)-(y-y_0)\}]-1\}$$
$$-2A^4\cdot\left\{1-(-1)^\mu\cdot\cos\left[\frac{a_\mu}{A}\{Ax_0+(y-y_0)\}\right]\right\};$$

$$\psi_{\mu_2}^{(2)}(y) = -\{A(a-x_0)-(y-y_0)\}\cdot\mathfrak{Sin}[a_\mu\{A(a-x_0)-(y-y_0)\}];$$

$$\mathfrak{L}_{\mu_1}^{(1)} = -[\psi_{\mu_1}^{(1)}(y)]_{y=0};$$

$$\mathfrak{L}_{\mu_2}^{(1)} = -[\psi_{\mu_2}^{(1)}(y)]_{y=0};$$

$$\mathfrak{L}_{\mu_3}^{(1)} = \mathfrak{Cof}(a_\mu y_0) - \mathfrak{Cof}[a_\mu\{A(a-x_0)+y_0\}] + A^2\cdot\{1-(-1)^\mu\cdot\cos(a_\mu x_0)\}\cdot\mathfrak{Cof}(a_\mu y_0)$$
$$-(-1)^\mu A\cdot\sin(a_\mu x_0)\cdot\mathfrak{Sin}(a_\mu y_0);$$

$$\mathfrak{L}_{\mu_1}^{(2)} = -[\psi_{\mu_1}^{(2)}(y)]_{y=b};$$

$$\mathfrak{L}_{\mu_2}^{(2)} = -[\psi_{\mu_2}^{(2)}(y)]_{y=b};$$

$$\mathfrak{L}_{\mu_3}^{(2)} = 1-\mathfrak{Cof}[a_\mu\{A(a-x_0)-(b-y_0)\}]+A^2\left\{1-(-1)^\mu\cdot\cos\left[\frac{a_\mu}{A}\{Ax_0+(b-y_0)\}\right]\right\}.$$

2. Wird das zuvor behandelte statische Beispiel dahin modifiziert, daß die in (1) verzeichnete Lastverteilung erst im Zeitpunkt $t=t_0$ auf die zuvor unbelastete Platte einzuwirken beginnt, so ist der Belastungsvorgang unter Beachtung von (2) und (3) durch den Ansatz

$$p(x,y,t) = \frac{p_0}{(2\pi i)^3}\cdot\int_{a_0-ix}^{a_0+ix}\frac{e^{-t_0\vartheta}}{\vartheta}\,d\vartheta\int_{a_0-ix}^{a_0+ix}\frac{e^{-y_0\zeta}}{\zeta}\,d\zeta\int_{a_0-ix}^{a_0+ix}e^{-[Ax_0-y_0]z}\cdot e^{Az\cdot x+(\zeta-z)y+\vartheta t}\,dz$$

zu beschreiben, und die Bewegungsgleichung lautet unter Vernachlässigung der Trägheit der Last

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+c^2\cdot\left\{\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right\}=\frac{1}{\varrho}\cdot p(x,y,t)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\left[w(x,y,t)\right]_{t=t_0}=\left[\frac{\partial w}{\partial t}\right]_{t=t_0}=0$$

und den Randbedingungen

$$\left[w(x,y,t)\right]_{x=0}=\left[w(x,y,t)\right]_{x=a}=\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{x=0}=\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]_{x=a}=0,$$

$$\left[w(x,y,t)\right]_{y=0}=\left[w(x,y,t)\right]_{y=b}=\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{y=0}=\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right]_{y=b}=0.$$

Die Integration verläuft in entsprechender Weise wie oben, worüber unter Voraussetzung einer rechteckig berandeten Lastangriffsfläche demnächst in dieser Zeitschrift ausführlicher berichtet werden soll. Im Anschluß hieran lassen sich sodann Impulswirkungen sowie der Fall eines beliebig vorgelegten Störungsgliedes $p(x,y,t)$ untersuchen, worauf ich unter besonderer Berücksichtigung gleichförmig beschleunigt bewegter Belastungen ebenfalls im einzelnen in der zuvor erwähnten Mitteilung zurückkommen werde. Eine eingehende direkte Behandlung des praktisch wichtigen Belastungsvorgangs einer mit konstanter Geschwindigkeit sich über die Platte hinwegbewegenden, zeitlich periodisch veränderlichen und rechteckig begrenzten Lastverteilung wurde kürzlich an anderer Stelle[5]) veröffentlicht. 231, 11

11. Bemerkungen zum Duffingschen Schwingungsproblem.

Von *Rudolf Iglisch* in Aachen.

Die ungeraden mit der Halbperiode π periodischen Schwingungen $x(t)$ eines einer erzwingenden Kraft $\beta g(t)$ unterworfenen mathematischen Pendels der Masse 1 und der Länge $\frac{g}{a^2}$ ($g=$ Schwerebeschleunigung) werden im Interwall $<0,\pi>$ für die Zeit t dargestellt durch die reellen Lösungen von

$$\ddot{x}+a^2\sin x=-\beta g(t)\ \text{(erste Randwertaufgabe)},$$

[5]) Ing.-Archiv **2**, 449, 1931.

wenn $g(t)$ eine ungerade periodische Funktion mit der Halbperiode π bedeutet. Für $\beta = 0$ erhält man die freien Pendelschwingungen. Unter dem Duffingschen Problem verstehe ich das folgende: Es sind die bei genügend kleiner Amplitude β der erzwingenden Kraft möglichen Schwingungen $x(t)$ von kleiner Amplitude zu untersuchen. Insbesondere interessiert man sich zunächst bescheiden für die bei jedem Zahlenpaar (α^2, β) mögliche Anzahl kleiner Lösungen für genügend kleine β, oder in anderer Ausdrucksweise: Wieviel Nachbarlösungen gibt es zu der Lösung $x = 0$ für $\beta = 0$? $g(t)$ wird also festgehalten und nur α^2 und β variiert. Es wird unter Benutzung der Schmidtschen Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen der bisher unerledigte Fall untersucht, daß $\alpha^2 = 1 + \varkappa$ ist mit genügend kleinem positiven oder negativen $\varkappa$ und $\int_0^\pi g(t) \sin t\, dt = 0$.

Die ersten Glieder der dem Problem zugeordneten Verzweigungsgleichung, die in erster Näherung über die Lösungsanzahl entscheiden, kann man so anschreiben:

$$0 = L(\varkappa)\lambda - \frac{1+\varkappa}{6} C(\varkappa) \int \sin t\,[\lambda C(\varkappa) \sin t + \beta k(t)]^3\, dt \quad \ldots\ldots \text{(I)}.$$

Dabei sind $C(\varkappa)$ und $L(\varkappa)$ gewisse analytische Funktionen von $\varkappa$ und es gilt

$$C(0) = \frac{2}{\pi}, \quad L(\varkappa) \gtreqless 0 \text{ für } \varkappa \gtreqless 0.$$

Ferner ist $\lambda = \int x(t) \sin t\, dt$ und es braucht nur die Verzweigungsgleichung (I) auf die Anzahl der reellen Wurzeln λ untersucht zu werden. Eine reelle Lösung λ ist sicher stets vorhanden, im Falle $\varkappa \leqq 0$ nur eine, da dann die Ableitung der Verzweigungsgleichung nach λ nicht verschwinden kann. Es bleibt also nur noch $\varkappa > 0$ zu betrachten. Es muß noch erwähnt werden, daß $k(t)$ eine aus $g(t)$ durch eine gewisse lineare Funktionaloperation hervorgegangene angebbare Funktion ist, für die $\int k(t) \sin t\, dt = 0$ gilt.

Für eine mehrfache Wurzel λ von (I) muß

$$0 = L(\varkappa) - \frac{1+\varkappa}{2} C^2(\varkappa) \int \sin^2 t\,[\lambda C(\varkappa) \sin t + \beta k(t)]^2\, dt \quad \ldots\ldots \text{(II)}$$

gelten, und das liefert für $\varkappa > 0$ eine reelle Ellipse in der (λ, β)-Ebene mit dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Zieht man die mit λ multiplizierte Gl. (II) von (I) ab und setzt noch $\lambda = z \cdot \beta$, so erhält man als weitere Bedingung für eine Mehrfachwurzel λ

$$\int \sin t\,[C(\varkappa) z \sin t + k(t)]^2\,[2C(\varkappa) z \sin t - k(t)]\, dt = 0 \quad \ldots\ldots \text{(III)}.$$

Man bestätigt leicht, daß diese Gleichung eine reelle Lösung z besitzt, wenn der Ausdruck

$$A = \int \sin t\, k^3(t)\, dt < 0$$

ist (was evtl. durch eine Vorzeichenänderung bei $k(t)$ bewirkt werden kann) und

$$B = \left(\int \sin^3 t\, k(t)\, dt\right)^3 - \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 A > 0;$$

drei reelle Wurzeln sind vorhanden, wenn $A < 0$ und $B < 0$ ausfällt. Dazu existieren noch drei Grenzfälle, wenn in einer dieser Ungleichungen oder in beiden das Gleichheitszeichen steht.

Jeder Lösung z von (III) entspricht in der (λ, β)-Ebene eine Gerade durch den Ursprung und ihr Schnitt mit der früher gefundenen Ellipse gibt mir bei dem betreffenden $\varkappa$ ein β, zu dem eine mehrfache Wurzel λ der Verzweigungsgleichung gehört. Auf diese Weise findet man für die beiden Hauptfälle in der (α^2, β)-Ebene in einem gewissen Rechteck um den Punkt $(1, 0)$ eine oder drei reelle Kurven, an denen die Lösungsanzahl um 2 springt.

Denkt man sich senkrecht über dieser (α^2, β)-Ebene zu jedem Punkt die Werte λ der zugehörigen Lösungen $x(t)$ aufgetragen, so erhält man eine ein- bzw. dreideutige Fläche. Der Schnitt dieser Fläche mit einer Ebene $\alpha^2 = \text{const} > 1$ liefert eine algebraische Kurve dritter Ordnung, deren senkrechten Tangenten Mehrfachlösungen entsprechen.

Liegt bei der eben betrachteten verkürzten Verzweigungsgleichung einer der beiden Hauptfälle vor, so gilt das gleiche für die vollständige Verzweigungsgleichung. In den drei Grenzfällen hat man jedoch noch die höheren Glieder der Verzweigungsgleichung zu berücksichtigen. Erwähnt sei noch, daß der schon in Prag vorgetragene Fall $\int g(t) \sin t\, dt \neq 0$ sich topologisch genau wie der erste Hauptfall verhält.

Eine ausführliche Darstellung der Theorie wird demnächst in den Monatsh. f. Math. u. Phys. erscheinen.

12. Einiges über lineare Transformationen und Vektoranalysis in n-Dimensionen.

Von *M. Herzberger*, wiss. Mitarbeiter von C. Zeiß, in Jena.

Ziel des Vortrages war, unter Benutzung möglichst weniger Hilfsmittel in Anlehnung an Graßmann eine Theorie der Vektoren im n-dimensionalen Raum, sowie eine Theorie der Invarianten linearer Transformationen zu entwickeln, wobei das Hauptgewicht auf möglichst anschauliche Deutung der Rechenoperationen gelegt wurde.

1. Vektoralgebra. Es seien n linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2 \ldots \mathfrak{e}_n$ gegeben, und der von ihnen aufgespannte lineare Vektorraum, dessen Vektoren durch

$$\mathfrak{x} = \xi_1 \mathfrak{e}_1 + \xi_2 \mathfrak{e}_2 + \ldots \xi_n \mathfrak{e}_n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

mit beliebigen reellen ξ_i gegeben seien. Je zwei Vektoren $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ sei eine reelle Zahl, ihr inneres Produkt zugeordnet, das gegenüber der Addition distributiv sei

$$\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{y} = (\sum_\iota \xi_i \mathfrak{e}_i)(\sum \eta_\varkappa \mathfrak{e}_\varkappa) = \sum_{i\varkappa} \xi_\iota \eta_\varkappa (\mathfrak{e}_\iota \mathfrak{e}_\varkappa) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

$(\mathfrak{e}_\iota \cdot \mathfrak{e}_\varkappa)$ seien n^2 reelle Zahlen, von denen wir voraussetzen, daß die zugehörige quadratische Form $\sum_{\iota,\varkappa} (\mathfrak{e}_\iota \mathfrak{e}_\varkappa) \xi_i \xi_\varkappa$ in den ξ_i positiv definit vom Range n sei. Als äußeres Produkt (nach Graßmann) sei das Symbol

$$[\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_\varkappa] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit $\varkappa \leqq n$ Vektoren bezeichnet. Für dieses Symbol verlangen wir, daß es den „Determinantenregeln" genüge, also bei Multiplikation eines Faktors mit einer reellen Zahl sich mit dieser multipliziere, bei Vertauschung zweier Faktoren sein Vorzeichen ändere, und dem distributiven Gesetz gegenüber der Addition genüge. Die äußeren Produkte von k-Faktoren erzeugen dann einen Vektorraum vom Rang $\binom{n}{k}$. Als inneres Produkt zweier Vektoren dieses Raumes definiert man zweckmäßig die Determinante der inneren Produkte der Faktoren:

$$[\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_\varkappa][\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_\varkappa] = |\mathfrak{a}_i \mathfrak{b}_\varkappa| \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Das äußere Produkt von n-Vektoren, die „Determinante", ist dann als Zahl zu betrachten, deren Vorzeichen bei obigen Festsetzungen noch nicht bestimmt ist. Die willkürliche Festsetzung des Vorzeichens für eine Determinante von n beliebigen Vektoren bestimmt dasselbe für jede andere Determinante; es wird hierdurch in dem betrachteten Raum ein Umlaufsinn festgelegt.

Mit Graßmann brauchen wir schließlich noch den Begriff der Ergänzung eines Vektors. $[\mathfrak{y}_{\varkappa+1}\ \mathfrak{y}_{\varkappa+2} \ldots \mathfrak{y}_n]$ ist die Ergänzung von $[\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_\varkappa]$, wenn gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_i \mathfrak{y}_\varkappa &= 0 \\ [\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_\varkappa]^2 &= [\mathfrak{y}_{\varkappa+1} \ldots \mathfrak{y}_n]^2 \\ \operatorname{sign} [\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_\varkappa\, \mathfrak{y}_{\varkappa+1} \ldots \mathfrak{y}_n] &> 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Von den Bestimmungsgleichungen (5) sind im allgemeinen nur die beiden ersten umkehrbar. Die Ergänzung der Ergänzung stimmt also nur bis aufs Vorzeichen mit dem ursprüglichen Vektor überein. Wir schreiben statt (5) mit Graßmann:

$$[\mathfrak{y}_{\varkappa+1} \ldots \mathfrak{y}_n] = |[\mathfrak{x}_1 \ldots \mathfrak{x}_\varkappa] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Die obigen Definitionen reichen zum Aufbau der Vektoralgebra aus. Von den Sätzen der Vektoralgebra erwähnen wir noch die wichtige Formel:

$$|[\mathfrak{a}\,|\,(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c})] = \mathfrak{b}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{c}) - \mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

2. Invariantensystem der linearen Transformationen. Gegeben sei eine lineare Transformation, die n linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$, n nicht notwendig linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_n$ zuordnet. Bei ihr entsprechen sich die beiden Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \xi_1 \mathfrak{a}_1 + \xi_2 \mathfrak{a}_2 \ldots + \xi_n \mathfrak{a}_n \\ \mathfrak{y} &= \xi_1 \mathfrak{b}_1 + \xi_2 \mathfrak{b}_2 \ldots + \xi_n \mathfrak{b}_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

$\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n$ ist eine Basis des Objektraums; $\mathfrak{a}_1^*, \mathfrak{a}_2^*, \ldots \mathfrak{a}_n^*$ heiße die zugehörige reziproke Basis, wenn gilt

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{a}_\iota \mathfrak{a}_\iota^* &= 1 \\ \mathfrak{a}_\iota \mathfrak{a}_\varkappa^* &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Wir suchen „Invarianten“, d. h. Größen, die für die Transformation charakteristisch, aber von der zufälligen Wahl der Basisvektoren $\mathfrak{a}_i$ unabhängig sind. Man findet als vollständiges Invariantensystem leicht n „skalare“ Größen, nämlich die n Koeffizienten der charakteristischen Gleichung

$$\left.\begin{aligned} [\mathfrak{b}_1 - \lambda\,\mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{b}_2 - \lambda\,\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{b}_3 - \lambda\,\mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{b}_n - \lambda\,\mathfrak{a}_n] = \\ \lambda^n - \Phi_1\,\lambda^{n-1} + \Phi_2\,\lambda^{n-2} + \ldots (-1)^n\,\Phi_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10),$$

also

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{[\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n] + [\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{a}_n] + \ldots [\mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_{n-1}\,\mathfrak{b}_n]}{[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n]} \\ \Phi_2 &= \frac{[\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{b}_2\,\mathfrak{a}_3 \ldots \mathfrak{a}_n] + [\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}_3 \ldots \mathfrak{a}_n] + \ldots [\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{b}_{n-1}\,\mathfrak{b}_n]}{[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n]} \\ \Phi_n &= \frac{[\mathfrak{b}_1\ \mathfrak{b}_2 \ldots \mathfrak{b}_n]}{[\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2 \ldots \mathfrak{a}_n]} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

und eine vektorielle Invariante, die einen Bivektor darstellt:

$$[\mathfrak{T}] = [\mathfrak{a}_1^*\,\mathfrak{b}_1] + [\mathfrak{a}_2^*\,\mathfrak{b}_2] + \ldots = \sum_{i<\varkappa} (\mathfrak{b}_\iota\,\mathfrak{a}_\varkappa - \mathfrak{a}_i\,\mathfrak{b}_\varkappa)\,[\mathfrak{a}_i^*\,\mathfrak{a}_\varkappa^*] \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

3. Zugehörige Matrizen. Jeder Transformation ist eine Anzahl Matrizen zugeordnet. Sei

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{b}_i = \sum \mathfrak{a}_{i\varkappa}\,\mathfrak{a}_\varkappa = \sum \beta_{i\varkappa}\,\mathfrak{a}_\varkappa^*, \\ \mathfrak{a}_i = \sum \delta_{i\varkappa}\,\mathfrak{a}_\varkappa^*, \end{aligned}\right. \quad \text{also} \quad \left.\begin{aligned} A = (\alpha_{i\varkappa}) = (b_i\mathfrak{a}_\varkappa^*) \\ B = (\beta_{i\varkappa}) = (b_i\,\mathfrak{a}_\varkappa) \\ \Delta = (\delta_{i\varkappa}) = (\mathfrak{a}_\iota\,\mathfrak{a}_\varkappa) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (13).$$

Wir fügen hinzu:

$$\Theta = (\vartheta_{i\varkappa}) = (\mathfrak{b}_\iota\,\mathfrak{b}_\varkappa) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

Δ und Θ sind symmetrische Matrizen, Δ dabei vom Rang n. Es gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} B = A\,\Delta \\ \Theta = A\,\Delta\,A' \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

Bei einer Änderung der Basis transformieren sich unsere vier Matrizen wie folgt:

Sei $\bar{\mathfrak{a}}_i = \sum \gamma_{i\varkappa}\,\mathfrak{a}_\varkappa$, so wird

$$\left.\begin{aligned} \bar{A} = \Gamma^{-1}\,A\,\Gamma, \quad \bar{\Delta} = \Gamma'\,\Delta\,\Gamma \\ \bar{B} = \Gamma'\,B\,\Gamma, \quad \bar{\Theta} = \Gamma'\,\Theta\,\Gamma \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

An diesen Beziehungen läßt sich sehr einfach die Zusammensetzung einer Transformation aus einer Drehung und einer Dilatation nach n zueinander orthogonalen Richtungen demonstrieren.

4. Besondere Transformationen. Eine Transformation heißt symmetrisch, wenn für sie gilt $B = B'$, d. h. wenn die zugehörige B-Matrix symmetrisch ist. Für eine symmetrische Matrix verschwindet nach (12) die vektorielle Invariante $[\mathfrak{T}]$. Es gibt, wie man sofort erkennt, n linear unabhängige zueinander orthogonale Vektoren, die bei der Transformation in der Richtung ungeändert bleiben.

Eine Transformation heiße anti(schief)symmetrisch, wenn jeder Vektor auf dem Bildvektor senkrecht steht. Dann ist seine B-Matrix schiefsymmetrisch.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = 0 \\ B + B' = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Eine schiefsymmetrische Transformation ist durch ihre vektorielle Invariante $[\mathfrak{T}]$ vollständig bestimmt. Es gilt analog zu der Darbouxschen Formel im dreidimensionalen Raum

$$\mathfrak{y} = \frac{1}{2}\,[[[\mathfrak{T}], \mathfrak{x}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Aus (17_1) folgt, daß eine schiefsymmetrische Transformation nur die Null als reellen Eigenwert haben kann.

Eine orthogonale Transformation läßt alle Vektoren der Länge nach invariant. Für sie ist kennzeichnend

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}^2 &= \mathfrak{y}^2 \\ A &= \Theta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

Aus (19_1) folgt u. a., daß eine orthogonale Transformation als reelle Eigenwerte nur ± 1 haben kann.

Die Cayleysche Darstellung einer orthogonalen Matrix ergibt sich aus der geometrischen Tatsache, daß die Diagonalen im Rhombus aufeinander senkrecht stehen. Aus (19_1) folgt

$$\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 = (\mathfrak{x} - \mathfrak{y})(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20).$$

Wenn also die n-Vektoren $\mathfrak{a}_i - \mathfrak{b}_i$ oder $\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i$ linear unabhängig sind, so ist die Transformation, die den Vektoren der einen Schar die der andern zuordnet, schiefsymmetrisch. Der Fall, in dem beide Scharen einen Rang $< n$ haben und der der algebraischen Behandlung große Schwierigkeiten machte, ist geometrisch natürlich auch leicht zu übersehen.

Es sei zum Schluß noch darauf hingewiesen, daß bei Wahl einer orthogonalen Basis $(A = E)$ (E Einheitsmatrix) stets gilt $A = B$. Insbesondere folgt für eine orthogonale Transformation aus (15)

$$A\,A' = E = B\,B' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21),$$

d. h. bei orthogonaler Basis ist die A- und B-Matrix einer orthogonalen Transformation im gewöhnlichen Sinn orthogonal.

5. Anwendungen. Es wurde in dem Vortrage zum Schluß auf einige Anwendungen verwiesen. Sei ein Vektorfeld gegeben, $u_1 \ldots u_n$ seien beliebige in der Umgebung eines Punktes eindeutig und stetig differenzierbare Koordinaten. Jedem Punkt $\mathfrak{a}(u_1 \ldots u_n)$ sei ein Vektor $\mathfrak{b}(u_1 \ldots u_n)$ zugeordnet. Die Differentiale

$$\left.\begin{aligned} d\,\mathfrak{a} &= \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial u_1} d u_1 + \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial u_n} d u_n \\ d\,\mathfrak{b} &= \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial u_1} d u_1 + \frac{\partial \mathfrak{b}}{\partial u_n} d u_n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

bestimmen eine infinitesimale lineare Transformation. Die gemäß (11) und (12) ihr zugeordneten Invarianten sind koordinatenunabhängige geometrische Größen des Vektorfeldes; insbesondere wird in der Vektoranalysis des dreidimensionalen Raumes Φ_1 als Divergenz, $[\mathfrak{T}]$ bzw. seine Ergänzung als Rotation bezeichnet. Diese koordinatenunabhängige Darstellung der Vektorfunktionen gibt auch den leichtesten Zugang zum Verständnis und Beweis der verallgemeinerten Sätze von Gauß und Stokes.

6. Flächentheorie. Man ordne jedem Punktvektor $\mathfrak{a}$ der $(n-1)$ dimensionalen Fläche den Normalenvektor $\mathfrak{n}$, jedem Punkt der nicht auf der Fläche liegt, den Vektor „Null" zu. $d\,\mathfrak{a}$ und $d\,\mathfrak{n}$ ergeben, in beliebigen Koordinaten, eine infinitesimale ausgeartete lineare Transformation, die, wie man leicht zeigt, symmetrisch ist. Die skalaren evtl. von Null verschiedenen Invarianten sind, in beliebigen Koordinaten, die symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen.

13. Mathematische Untersuchungen über die Verteilung der Ströme und Verluste in der gegenseitigen Blechisolation von Transformatoren.

Von *G. Stein*.

Die Eisenverluste sind mitbestimmend für die Betriebskosten und den Anschaffungspreis eines Transformators. Sie setzen sich aus Hysterese- und Wirbelstromverlusten zusammen. Der Transformatorkern besteht zur Vermeidung hoher Wirbelstromverluste aus dünnen gegeneinander elektrisch isolierten Blechen. Die Abhängigkeit jener Verluste von der Isolation soll hier untersucht werden.

Der Kernquerschnitt besitzt eine aus Rechtecken zusammengesetzte Form. In ein solches aus sehr vielen Blechen bestehendes Rechteck von der Breite b und der Höhe h sind bei der schematischen Darstellung (Abb. 1) nur wenige eingezeichnet. Sie werden gleichmäßig vom magnetischen Wechselfluß durchsetzt. Die Rückwirkung der Wirbelstromverteilung auf das

Magnetfeld und sein Anteil in der Isolationsschicht sind vernachlässigt. ϱ und ϱ_i bezeichnen die spezifischen Widerstände des Eisens und der Isolation, δ und δ_i die zugehörigen Schichtstärken. Für $\varrho_i \to \infty$ existiert nach Abb. 1 in jedem Blech eine lineare Verteilung J_0. Sie erregt bei endlichem ϱ_i ein sich überlagerndes zur Rechteckmitte symmetrisches Stromfeld, nämlich in der Isolationsschicht i und im Eisen $\mathfrak{J}$, so daß dort $J = \mathfrak{J} + J_0$ fließt. Hierbei ströme i in der $\mathfrak{x}$-, $\mathfrak{J}$ in der $\mathfrak{y}$-Richtung eines in der Mitte des linken Blechrandes liegenden Koordinatensystems $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, da nur diese Komponenten wegen der Übergangsbedingungen am Eisenrande und wegen $\varrho \ll \varrho_i$ einen nennenswerten Beitrag zu den Verlusten liefern können. Wegen $\delta_i \ll \delta$ ersetzen wir ϱ_i durch einen spezifischen Übergangswiderstand λ von Blech zu Blech. Die Spannung $i \cdot \lambda$ zwischen 2 benachbarten Blechrändern errechnet sich wegen der Wirbelfreiheit des elektrischen Feldes in der Isolation durch Integration über $\mathfrak{y}$ der zwischen jenen Rändern auftretenden Feldstärken-Differenzen. Diese sind nach Abb. 1 gleich der Abnahme von ϱJ_0 und der Zunahme von $\varrho \mathfrak{J}$ in einem Blech und können wegen $\delta \ll h$ und b nach einem Grenzübergang gleich $+\varrho\,\delta \dfrac{\partial (\mathfrak{J} - J_0)}{\partial \mathfrak{x}}$ geschrieben werden. Deshalb läßt sich

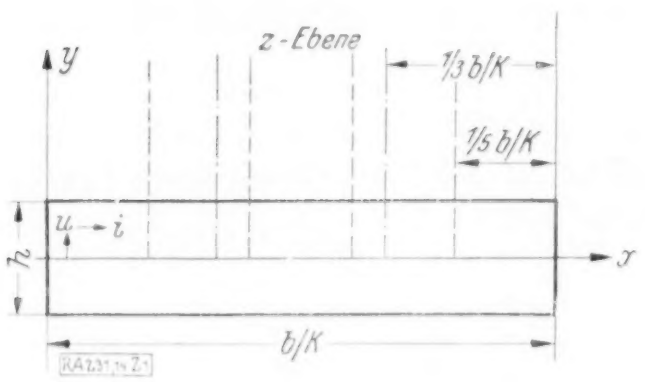


Abb. 2. Bereich der Funktion $v(z)$

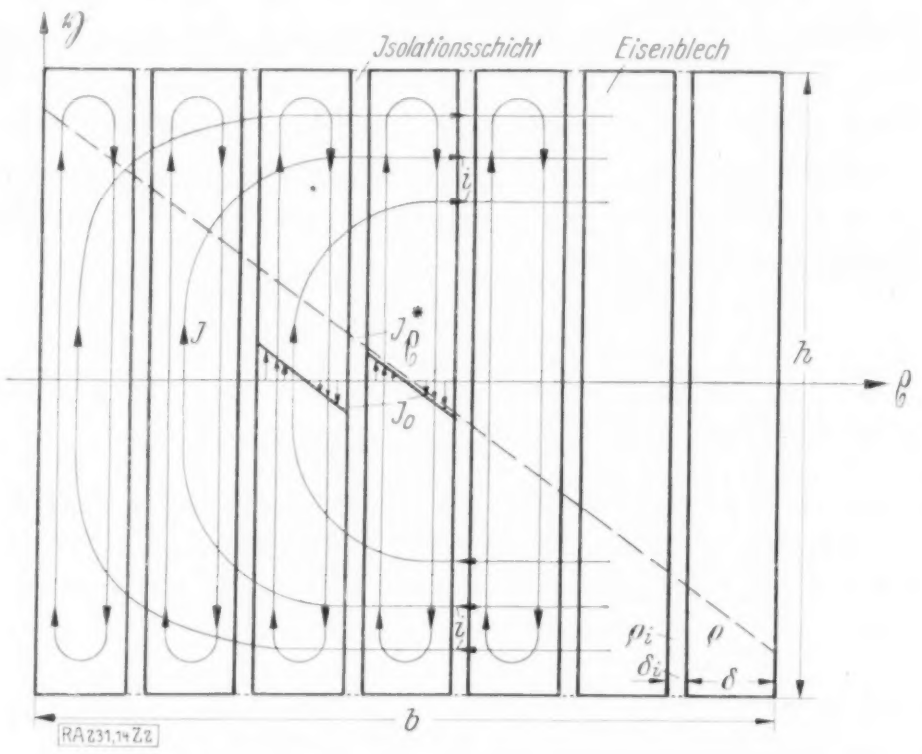


Abb. 1. Schematische Darstellung des elektrischen Feldes in einem rechteckigen Paketquerschnitt

auf Abb. 1 im Eisen die sprungweise Änderung von J_0 formal durch einen stetigen Verlauf $J_0^*(\mathfrak{x})$ ersetzen, dem ein Gesamtstrom $J^* = \mathfrak{J} - J_0^*$ entspricht. In ähnlicher Weise bestimmt man wegen der Quellenfreiheit des gesamten elektrischen Feldes $\mathfrak{J}$ durch Integration über $\mathfrak{y}$ der sich von Blech zu Blech ergebenden Veränderungen von i. Physikalisch ersetzen wir hiermit das Blechpaket durch einen homogenen anisotropen Körper, welcher in der $\mathfrak{x}$-Richtung den sehr großen spezifischen elektrischen Widerstand $\dfrac{\lambda}{\delta}$, in der $\mathfrak{y}$-Richtung den sehr kleinen spezifischen Widerstand ϱ besitzt. In dem vereinfachten Falle $J = J_0$ findet man einen oberen Wert i_n für i, aus welchem sich unter der Annahme, daß das ganze i_n in einem einzigen Bleche zurückströme, ein oberer Wert $\mathfrak{J}_n$ für $\mathfrak{J}$ ergibt. Im allgemeinen Falle hingegen folgen für:

$$\frac{\delta\,\varrho}{\lambda} = \varkappa^2$$

die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial J^*}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial J^*}{\partial \mathfrak{x}} = 0\text{; Quellenfreiheit}$$

$$\varkappa^2 \frac{\partial J^*}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{\partial J^*}{\partial \mathfrak{y}} = 0\text{; Wirbelfreiheit in der Isolation,}$$

deren Lösung wir durch die Substitution:

$$\varkappa \mathfrak{x} = x, \quad \mathfrak{y} = y; \quad \varkappa J^* = u$$

in ein gewöhnliches Potentialfeld:

$$u + \sqrt{-1}\, i = v(\mathfrak{z}); \quad x + \sqrt{-1}\, y = \mathfrak{z};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

überführen. Der Bereich hat sich nach Abb. 2 in ein Rechteck von den Seitenlängen $\frac{b}{\varkappa}$ und h verändert. Als Randbedingungen ergeben sich:

$$\text{I.} \quad i(x,0) = i(0,y) = i\left(\frac{b}{\varkappa}, y\right) = 0$$

$$\text{II.} \quad u\left(x, \frac{h}{2}\right) = -\varkappa J_0^*$$

$$= -\sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos \frac{\pi}{\frac{b}{\varkappa}} (2m-1)\, x.$$

Die Bedingung I ist damit identisch, daß i auf den Rändern eines Halbstreifens von der Breite $\frac{b}{\varkappa}$ verschwindet, dessen Basis in die x-Achse fällt, und wird so durch eine partikuläre Lösung

$$v_m = A_m \cdot \cos \frac{\pi}{b/\varkappa} (2m-1)\, \zeta$$

erfüllt, welche den $(2m-1)$ ten, nach Abb. 2 z. B. den 3 ten oder 5 ten Teilstreifen auf die obere Halbebene abbildet. Zur Erfüllung der Randbedingung II wird

$$v = \Sigma(m)\, v_m$$

gebildet, worauf sie:

$$A_m = -\frac{c_m}{\mathfrak{Cof} \frac{\pi}{b/\varkappa} (2m-1) \frac{h}{2}}$$

liefert. Hierin ist nach in der AEG Transformatorenfabrik vorgenommenen Messungen von λ größenordnungsmäßig:

$$\frac{b/\varkappa}{h} = 10^2 \div 10^3.$$

Es kommt also von den einzelnen Streifen in der y-Richtung nur ein sehr schmaler Bereich in Frage, so daß selbst eine größere Verschiebung der rechten Streifenränder auf den Funktionsverlauf am linken Rechteckrand keinen merkbaren Einfluß hat, b aus der Rechnung herausfällt, $\Sigma(m)\, v_m$ sehr schlecht konvergiert und durch ein Integral mit der Integrationsvariablen:

$$\xi = \frac{\pi}{b/\varkappa} \frac{h}{2} (2m-1)$$

ersetzt werden kann. Unter Zusammenfassung von:

$$s = \frac{x}{\varkappa} \frac{1}{\frac{h}{2}}$$

findet man so speziell für:

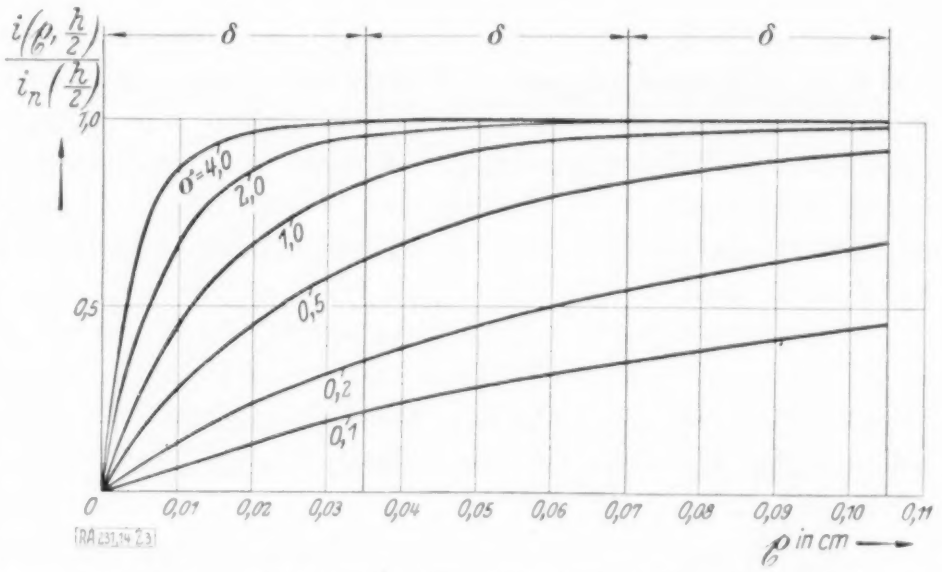


Abb. 3. Verteilung der Isolationsströme an den Seitenrändern eines rechteckigen Paketquerschnittes

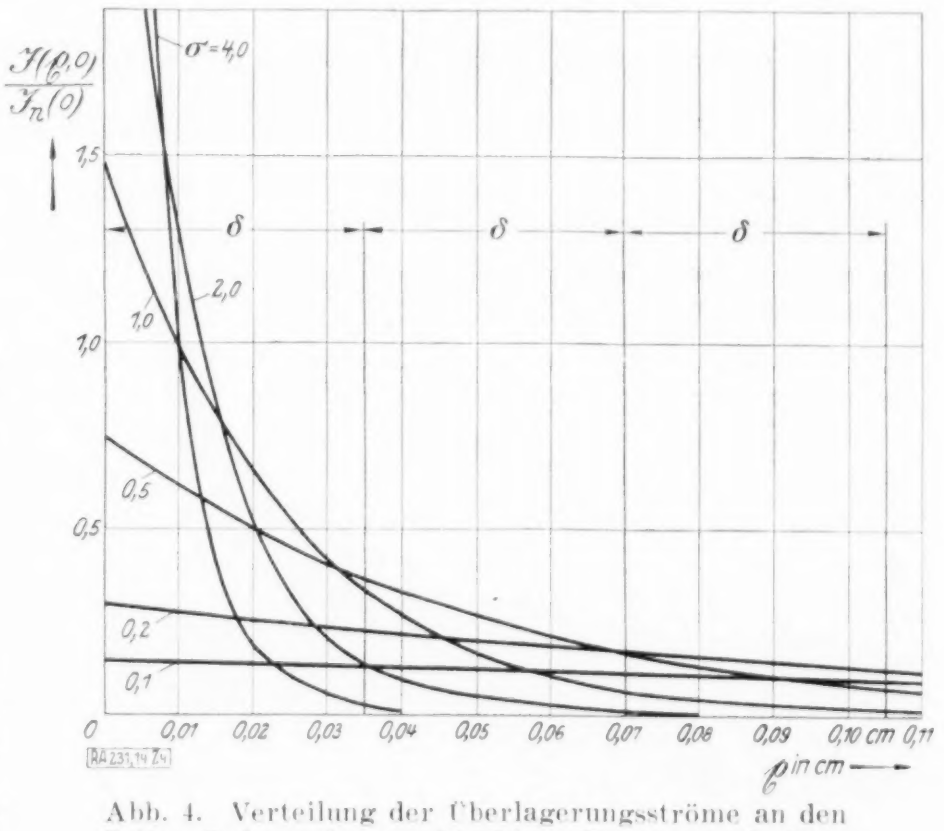


Abb. 4. Verteilung der Überlagerungsströme an den Seitenrändern eines rechteckigen Paketquerschnittes

$$\frac{i\left(\mathfrak{x}, \frac{h}{2}\right)}{i_n\left(\frac{h}{2}\right)} = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{1}{\xi^2} \sin s\,\xi \operatorname{tg} \xi\, d\,\xi;$$

$$\frac{\Im(\mathfrak{x}, 0)}{\Im_n(0)} = \frac{4}{\pi}\,\frac{\delta}{\mathfrak{x}}\, s\int_0^x \frac{1}{\xi^2} \cos s\,\xi \left|1 - \frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\xi}\right| d\,\xi.$$

Die Auswertung dieser Integrale ist auf Abb. 3 und 4 für verschiedene spezifische Größen:

$$\sigma = \frac{1}{\varkappa}\,\frac{\delta}{\frac{h}{2}} = 1 \div 10^2$$

in Abhängigkeit von $\mathfrak{x}$ eingetragen. In diesem Bereiche von σ steigt i nach Abb. 3 bereits in 3 Randblechen gegen i_n, während $\Im$ auf Abb. 4 in gleicher Weise gegen Null geht und so zu vernachlässigen ist. Demnach kehrt das parallel zur $\mathfrak{x}$-Achse fließende i erst in den äußersten Randblechen um, so daß die Zusatzverluste W_i infolge der Isolationsströme im ganzen Rechteck Abb. 1 aus der Verteilung i_n berechnet werden können. W_i wird alsdann im Verhältnis zu den von J_0 herrührenden ideellen Wirbelstromverlusten W_0:

$$\frac{W_i}{W_0} = (\varkappa h)^2.$$

In derselben Näherung bestimmt man die Verluste in einem aus mehreren Rechtecken bestehenden Kernquerschnitt durch Summierung der hier berechneten Verluste in den Einzelrechtecken.

W_0 beträgt je nach der Blechsorte und Blechstärke 20 bis 40 vH der gesamten Eisenverluste. 231, 14

14. Beschränkte Funktionen und Wechselstromschaltungen.

Von *W. Cauer* in Göttingen.

Der Stromverlauf in einer aus Induktivitäten, Gegeninduktivitäten, positiven Ohmschen Widerständen und Kapazitäten bestehenden Schaltung wird durch ein System von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben, dessen n-Unbekannte die Elektrizitätsmengen (und ihre Differentialquotienten, die Ströme) sind, und das dieselbe Form besitzt, wie die Differentialgleichungen eines kleine Schwingungen ausführenden mechanischen Systems. Während die Lösung eines solchen Differentialgleichungssystems wohlbekannt ist, hat man sich bis vor kurzem mit der mathematischen Behandlung der folgenden umgekehrten Aufgabe, die für die Elektrotechnik sehr wichtig ist, kaum befaßt: „Gegeben einige Ströme als Funktion der Zeit bei gegebenen elektromotorischen Kräften und Anfangsbedingungen, zu finden ist eine Schaltung, d. h. ein Differentialgleichungssystem der beschriebenen Art, derart, daß die Lösungen (Ströme) den Vorschriften entsprechen." Geht man zu den Fourierschen Transformierten der elektromotorischen Kräfte und Ströme über, so entsteht das äquivalente Problem: „Eine Schaltung mit vorgeschriebenen Frequenzcharakteristiken zu konstruieren," d. h. eine Schaltung, deren für rein periodische Wechselströme gültige Charakteristiken in vorgeschriebener Weise von der Frequenz des Wechselstroms abhängen. Die mathematische Behandlung dieser Aufgabe führt u. a. auf einen ganz naturgemäßen Zusammenhang mit den beschränkten analytischen Funktionen. Man wird auf das folgende Problem geführt, das in rein mathematischer Terminologie formuliert werden möge:

$$\sum L_{ik}\, x_i\, x_k, \qquad \sum R_{ik}\, x_i\, x_k, \qquad \sum D_{ik}\, x_i\, x_k$$

seien drei nicht negative quadratische Formen in n-Variabeln, bzw. mit den Matrizen L, R, D. Man bilde, wenn λ eine komplexe Variable bedeutet, die Matrizensumme $A = \lambda L + R + \lambda^{-1} D$[1]) und hierzu die inverse Matrix A^{-1}. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß eine gegebene quadratische symmetrische Matrix B mit höchstens n-Zeilen, deren Elemente Funktionen von λ sind, als Hauptminor irgendeiner A^{-1} aufgefaßt werden kann? Eine in solcher Weise durch L, R, D darstellbare Matrix B möge kurz als „darstellbar" bezeichnet werden.

[1]) $|A|$ sei nicht identisch Null.

Die physikalische Bedeutung ist die: L_{ik}, R_{ik}, D_{ik} sind die Induktivitäten, Ohmschen Widerstände und reziproken Kapazitäten der n-unabhängigen Stromkreise einer Schaltung und die Koeffizienten der zweiten, ersten und nullten Ableitungen der Unbekannten jenes Differentialgleichungssystems. Die zugehörigen quadratischen Formen repräsentieren die elektromagnetische Energie der Spulen, die Youlesche Wärme der Ohmschen Widerstände und die elektrostatische Energie der Kapazitäten, also drei nicht negative Größen. Setzt man $\lambda = i\,\omega$, so hat ω die Bedeutung der Kreisfrequenz des Wechselstroms. Die vorgelegte Matrix B repräsentiert die Frequenzcharakteristiken der Schaltung. Z. B. charakterisieren in dem Spezialfall, daß B zweizeilig ist, die Matrizenelemente B_{ik} einen „Vierpol“ vermögen der Gleichungen

$$I_1 = B_{11}\,E_1 + B_{12}\,E_2$$
$$I_2 = B_{21}\,E_1 + B_{22}\,E_2,$$

wobei I_1 und I_2 die Ströme und E_1 und E_2 die Spannungen an den Eingangs- und Ausgangsklemmen des Vierpoles bedeuten. Ein wesentlicher Teil der Aufgabe[2]), eine Schaltung mit vorgeschriebenen Frequenzcharakteristiken zu finden, besteht in der Auffindung „darstellender“ L, R, D.

Um die Antwort auf obiges mathematische Problem formulieren zu können, mögen folgende Definitionen eingeführt werden:

1. Eine Funktion $f(\lambda)$ heiße positiv, wenn sie in der rechten λ-Halbebene regulär, auf der reellen Achse reell ist und im Innern der rechten Halbebene positiv reellen Teil besitzt.

2. Eine quadratische symmetrische Matrix B, deren Elemente Funktionen von λ sind, heiße positiv, wenn ihre Elemente in der rechten λ-Halbebene analytisch und für reelle λ reell sind, und wenn außerdem die Matrix der reellen Teile der Elemente von B für jedes λ im Innern der rechten Halbebene zu einer positiv definiten quadratischen Form gehört. Damit gleichbedeutend ist: B heißt positiv, wenn $\Sigma B_{ik}\,x_i\,x_k$ für alle reellen Werte von x_i, die nicht sämtlich verschwinden, eine positive Funktion darstellt.

Die Antwort auf unser Problem kann nun ausgesprochen werden durch die folgende allgemeine

Vermutung: Die Klasse der darstellbaren Matrizen B ist identisch mit der Klasse der positiven Matrizen B[3]).

Diese Vermutung wurde bisher u. a. für den Fall bewiesen, daß B aus einem Element besteht[4]) (positive Funktion, Wechselstromwiderstand), sowie für den Fall einer zweireihigen Matrix B mit der Einschränkung $B_{11} = B_{22}$ (symmetrischer Vierpol)[5]).

Daß jede darstellbare Funktion positiv sein muß, wird physikalisch plausibel aus dem jedem Elektrotechniker geläufigen Umstand, daß der Realteil eines Wechselstromwiderstandes (λ rein imaginär) nicht negativ ist. Rein algebraisch läßt sich die Notwendigkeit der Positivheit für darstellbare Matrizen daraus folgern, daß A positiv ist, und daß mit jedem B auch B^{-1} positiv ist. Letzteres ist eine Verallgemeinerung des Satzes, daß mit jeder positiven quadratischen Form auch die inverse Form positiv definit ist.

Schwieriger ist zu zeigen, daß jede positive Matrix darstellbar ist. Zu den Beweisen, soweit sie geführt sind, wurden teilweise topologische Methoden verwandt. Brune[4]) benutzt einen Algorithmus, der als Spezialfall den Stieltjesschen Kettenbruchalgorithmus enthält.

Die Auffindung von darstellenden L, R, D zu gegebener charakteristischer Matrix B entspricht im allgemeinen nicht der unmittelbar vorliegenden technischen Aufgabe. Die Frequenzcharakteristiken sind oft graphisch durch Kurven oder gewisse ideale Forderungen vorgeschrieben. So ergeben sich Interpolationsprobleme, positive Matrizen B, deren Elemente rationale Funktionen von λ sind, aufzufinden, die jene Forderungen approximativ erfüllen. Die eigentümliche Schwierigkeit aller dieser Interpolationsprobleme liegt darin, daß die interpolierenden Funktionen (oder Matrizen) nicht ganz rational, sondern gebrochen rational und positiv sein müssen.

Daß die angeführten mathematischen Überlegungen in der Tat zu wesentlichen technischen Fortschritten führen, wurde durch die Lösung des Interpolationsproblems der symmetrischen vierpoligen Siebschaltungen bewiesen[6]). 231, 15

[2]) Nicht die ganze Aufgabe, die offenbar wegen der Verknüpfung der Schaltelemente ein teilweise kombinatorisch-topologisches Problem darstellt. Man vergleiche dazu und zu der Frage, inwiefern eine Reduzierung des ursprünglichen Problems, in dem die drei quadratischen Formen L, R, D nicht gleichberechtigt auftreten, auf das hier formulierte möglich ist, meine Arbeit „Untersuchungen über ein Problem, das drei positiv definite quadratische Formen mit Streckenkomplexen in Beziehung setzt“, Math. Ann. Bd. 105, (1931) S. 86.

[3]) Formuliert in dem abstract „Electric networks and bounded functions“, Bull. Amer. Math. Soc. März 1931.

[4]) Otto Brune „Synthesis of a two-terminal network whose driving-point impedance is a prescribed function of frequency“, Journ. of Math. and Phys. Mass. Inst. of Technology 1931.

[5]) In einer demnächst in den Math. Ann. erscheinenden Arbeit „Über Funktionen mit positivem Realteil“, die überhaupt eine ausführlichere Darstellung des in diesem Vortrag behandelten Stoffes bringt.

[6]) „Die Siebschaltungen der Fernmeldetechnik“, diese Zeitschr. Okt. 1930 und „Siebschaltungen“, VDI-Verlag 1931.

15. Über achsensymmetrische Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie.

Von *E. Weinel* in Göttingen.

Zur Untersuchung von Spannungszuständen in beliebig gestalteten Umdrehungskörpern ist eine Integralgleichungsmethode besonders geeignet, wie sie ähnlich für ebene Spannungsaufgaben von R. Miche[1]) entwickelt worden ist. Neben ihrer physikalischen Anschaulichkeit hat eine solche Darstellung den Vorzug, auch in solchen Fällen zahlenmäßig durchführbar zu sein, in denen die Lösung mit den sonst üblichen Methoden — selbst näherungsweise — bisher noch nicht gelungen ist.

Bei den ins Auge gefaßten Spannungszuständen sehen wir von Massenkräften ab und betrachten hier nur den Fall, daß an der Oberfläche des Drehkörpers achsensymmetrisch verteilte Oberflächenkräfte vorgeschrieben sind.

1. Der Verschiebungszustand und seine Integraldarstellung. Bedeutet $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(x, y, z)$ den Vektor der Verschiebung und m die Poissonsche Zahl, so genügt das Verschiebungsfeld den Grundgleichungen der Elastizität

$$\Delta \mathfrak{u} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{u} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Bezeichnet $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(x, y, z)$ den Ortsvektor eines Aufpunktes, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}$ zwei willkürliche Vektoren, so hat ein partikuläres Integral von Gl. (1) die Form

$$\mathfrak{u} = (3m-4)\frac{\mathfrak{A}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{R}|} + m\,\mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{r}-\mathfrak{R})\frac{\mathfrak{r}-\mathfrak{R}}{|\mathfrak{r}-\mathfrak{R}|^3} \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Diese wohlbekannte Lösung bildet das Verschiebungsfeld einer im Punkte $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(X, Y, Z)$ eines unendlich ausgedehnten Kontinuums angreifenden Einzelkraft, die nach Größe und Richtung durch den Vektor

$$\mathfrak{P} = \frac{\mathfrak{A}}{16\pi(m-1)}$$

gegeben ist.

Aus dem Bettischen Theorem läßt sich folgern, daß der Verschiebungszustand im Innern eines endlich begrenzten Körpers durch eine Oberflächenbelegung solcher Einzelkräfte darstellbar ist. Versteht man dementsprechend unter $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(X, Y, Z)$ die Ortsvektoren der Oberflächenpunkte und unter $\mathfrak{P} = \mathfrak{P}(X, Y, Z)$ eine vektorielle Oberflächenfunktion, so besteht die Integraldarstellung:

$$\mathfrak{u}(x, y, z) = \frac{3m-4}{16\pi(m-1)}\iint \mathfrak{P}(X, Y, Z)\frac{d\omega}{\varrho} + \frac{m}{16\pi(m-1)}\iint \mathfrak{P}(X, Y, Z)\cdot(\mathfrak{r}-\mathfrak{R})\frac{\mathfrak{r}-\mathfrak{R}}{\varrho^3}\,d\omega\,.$$

$$(\varrho = |\mathfrak{r}-\mathfrak{R}|). \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Die Frage nach der vektoriellen Oberflächenfunktion $\mathfrak{P}$, die zu einem in gegebener Weise belasteten Körper gehört, führt auf eine vektorielle Integralgleichung für $\mathfrak{P}$, oder auf drei simultane skalare Gleichungen entsprechend den drei Komponenten. Bei achsensymmetrischen Problemen wird eine dieser Gleichungen (Torsionsgleichung!) unabhängig von den beiden andern, und die ganze Darstellung vereinfacht sich so weit, daß die zahlenmäßige Durchführung einer Anzahl praktisch interessanter Aufgaben möglich erscheint.

2. Der achsensymmetrische Verschiebungszustand. Führt man Zylinderkoordinaten r, φ, z ein, so hängen im achsensymmetrischen Fall die Komponenten P_r, P_φ, P_z der Belegung nicht mehr von der Winkelkoordinate φ ab, und für das Oberflächenelement $d\omega$ ist zu setzen

$$d\omega = R(\sigma)\,d\sigma\,d\varphi.$$

Dabei bedeutet σ die Bogenlänge auf der Meridiankurve, und die Koordinaten $R = R(\sigma)$, $Z = Z(\sigma)$ der Oberflächenpunkte sind ebenso wie die Komponenten P_r, P_φ, P_z als Funktionen von σ anzusehen.

Die Integration nach φ, die also unabhängig von der speziellen Form des Drehkörpers und der Belegung vorgenommen werden kann, führt auf elliptische Integrale.

Setzt man

$$[r-R(\sigma)]^2 + [z-Z(\sigma)]^2 = R_1^2(r, z, \sigma), \qquad [r+R(\sigma)]^2 + [z-Z(\sigma)]^2 = R_2^2(r, z, \sigma),$$

$$\frac{r-R(\sigma)}{R_1} = \cos\alpha_r, \qquad \frac{z-Z(\sigma)}{R_1} = \cos\alpha_z, \qquad \frac{r+R(\sigma)}{R_2} = \cos\beta_r, \qquad \frac{z-Z(\sigma)}{R_2} = \cos\beta_z,$$

[1]) R. Miche, Verh. d. II. int. Kongr. f. techn. Mechanik, Zürich 1925.

und bildet aus den vollständigen elliptischen Integralen

$$E=\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-\frac{R_2^2-R_1^2}{R_2^2}\sin^2\varphi}\,d\varphi\,,\qquad K=\int_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{R_2^2-R_1^2}{R_1^2}\sin^2\varphi}}$$

die linearen Aggregate

$$H_1(r,z,\sigma)=\frac{4\,R(\sigma)\,R_2}{R_2^2-R_1^2}\,[E-\frac{R_1^2}{R_2^2}\,K];\quad H_2(r,z,\sigma)=\frac{4\,R(\sigma)\,R_2}{R_2^2-R_1^2}[E-K],$$

so lassen sich die Verschiebungskomponenten auf die folgende Form bringen:

$$\left.\begin{aligned}
u_r(r,z)&=\frac{1}{4\pi}\int P_r(\sigma)\,[H_1+H_2]\,d\sigma+\frac{m}{16\pi(m-1)}\int(P_r\cos\alpha_r+P_z\cos\alpha_z)\cos\alpha_r\,H_1\,d\sigma\\
&\quad+\frac{m}{16\pi(m-1)}\int(P_r\cos\beta_r-P_z\cos\beta_z)\cos\beta_r\,H_2\,d\sigma;\\
u_\varphi(r\,z)&=\frac{1}{4\pi}\int P_\varphi(\sigma)\,[H_1+H_2]\,d\sigma\\
u_z(r,z)&=-\frac{1}{4\pi}\int P_z(\sigma)\,[H_1-H_2]\,d\sigma+\frac{m}{16\pi(m-1)}\int(P_r\cos\alpha_z-P_z\cos\alpha_r)\cos\alpha_r\,H_1\,d\sigma\\
&\quad+\frac{m}{16\pi(m-1)}\int(P_r\cos\beta_z+P_z\cos\beta_z)\cos\beta_r\,H_2\,d\sigma.
\end{aligned}\right\}\quad(4).$$

3. Verzerrungskomponenten und Spannungen. Aus Gl. (4) lassen sich nun durch Differenzieren die Verzerrungskomponenten und somit nach dem Elastizitätsgesetz die Spannungen durch die Belegung quellenmäßig darstellen. Sieht man von den als Faktoren eingehenden elliptischen Integralen ab, so haben diese Spannungsausdrücke Ähnlichkeit mit Potentialen der doppelten Schicht, und durch einen aus der Potentialtheorie geläufigen Grenzübergang ergeben sich dann auch die Oberflächenwerte der Spannungen.

4. Die Integralgleichungen. Die an der Oberfläche wirksamen Spannungen

$$\sigma_n,\qquad \tau_{ns},\qquad \tau_{n\varphi}$$

sind durch die Randbedingungen vorgeschrieben.

Zerlegt man nun den Vektor der Belegung statt nach den Koordinatenrichtungen r, z in seine Komponenten P_n, P_s, P_φ nach der Oberflächennormalen n und den dazu senkrechten Richtungen s und φ, so führen die im vorigen Abschnitt erwähnten Grenzübergänge auf ein Integralgleichungssystem vom Typus:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_n(s)&=P_n(s)+\int P_n(\sigma)\,L_1(s,\sigma)\,d\sigma+\int P_s(\sigma)\,L_2(s,\sigma)\,d\sigma\\
\tau_{ns}(s)&=P_s(s)+\int P_n(\sigma)\,M_1(s,\sigma)\,d\sigma+\int P_s(\sigma)\,M_2(s,\sigma)\,d\sigma\\
\tau_{n\varphi}(s)&=P_\varphi(s)+\int P_\varphi(\sigma)\,N(s,\sigma)\,d\sigma
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(5).$$

Die Kerne L_1, L_2, M_1, M_2, N enthalten neben den elliptischen Integralen auch die Poissonsche Zahl. Die übrigen Bestandteile werden von geometrisch einfach zu deutenden Ausdrücken gebildet, die sich aus elementaren Konstruktionen in der Meridianschnittebene ergeben.

Die numerische Auflösung des Systems (5) wird durch den Umstand wesentlich erleichtert, daß man durch physikalische Überlegungen die Verteilung der Oberflächenbelegung näherungsweise abzuschätzen vermag. Durch sukzessive Approximation läßt sich diese rohe Näherung dann beliebig verbessern. Nach Ermittlung der Belegung sind Verschiebungen und Spannungen an jeder Stelle durch gewöhnliche Quadraturen gegeben. Besonders einfach gestalten sich diese Beziehungen auf der Umdrehungsachse.

Über die Einzelheiten der hier skizzierten Methode und ihre Anwendung wird noch in Ausführlichkeit berichtet werden.

16. Neue Wege zur zeichnerischen Behandlung der räumlichen Mechanik.

Von *Rudolf Beyer* in Zwickau.

Während sich die zeichnerischen Methoden dank ihrer Übersichtlichkeit und oft überraschenden Einfachheit schon längst in der Kinematik und Statik ebener Systeme eingebürgert hatten, lagen für die räumliche Mechanik, sowohl in der Raumkraftstatik als auch in der räumlichen Kinematik, die Verhältnisse wesentlich ungünstiger. Daß auf diesem Gebiete bis vor kurzem kein wesentlicher Fortschritt mit einfachen Lösungen und wenigen theoretischen

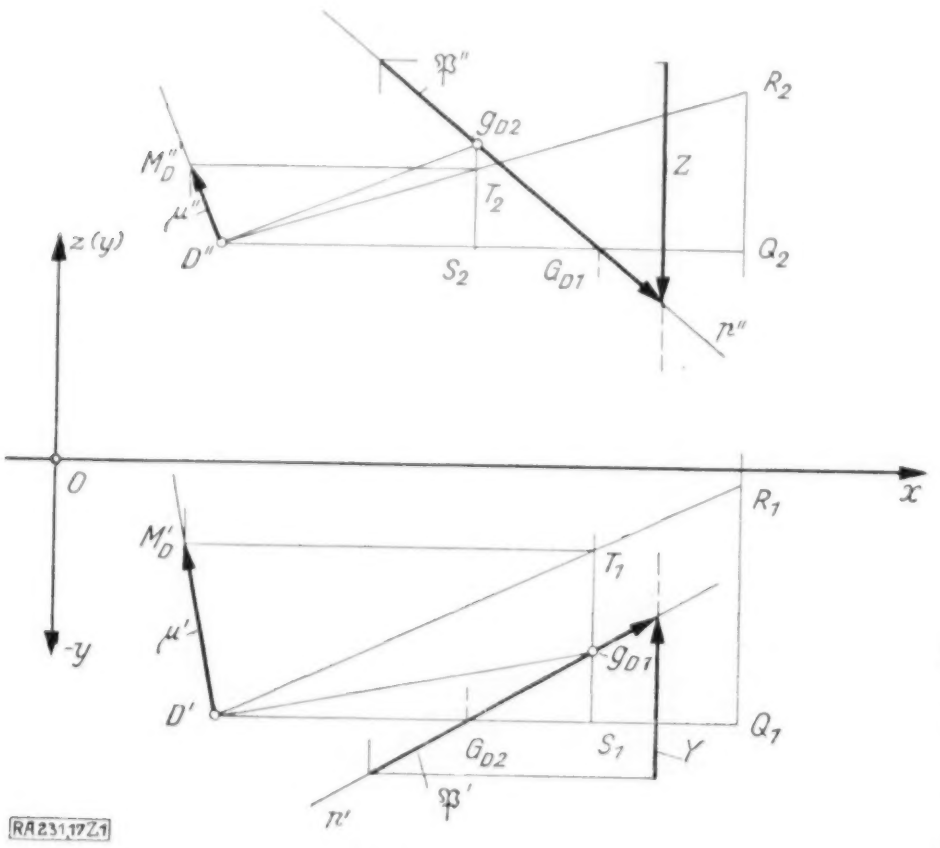


Abb. 1.

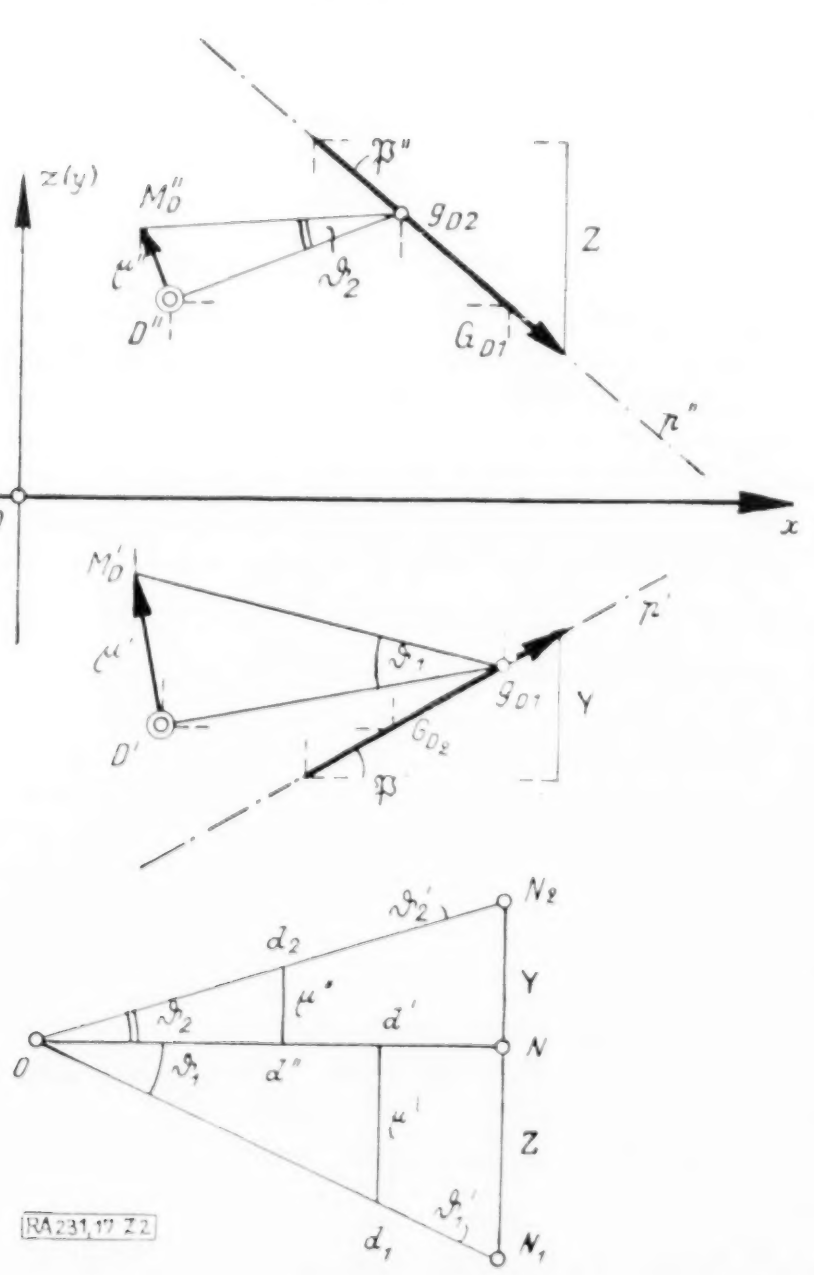


Abb. 2.

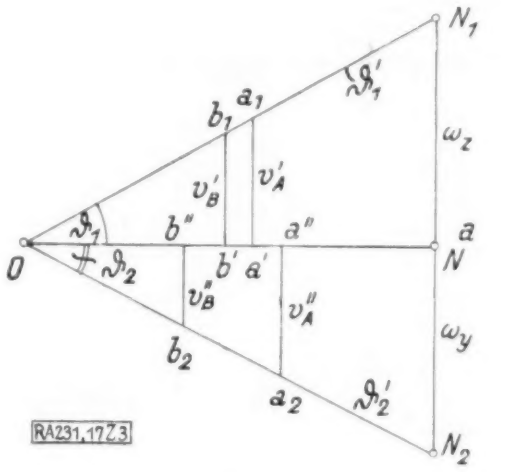


Abb. 3.

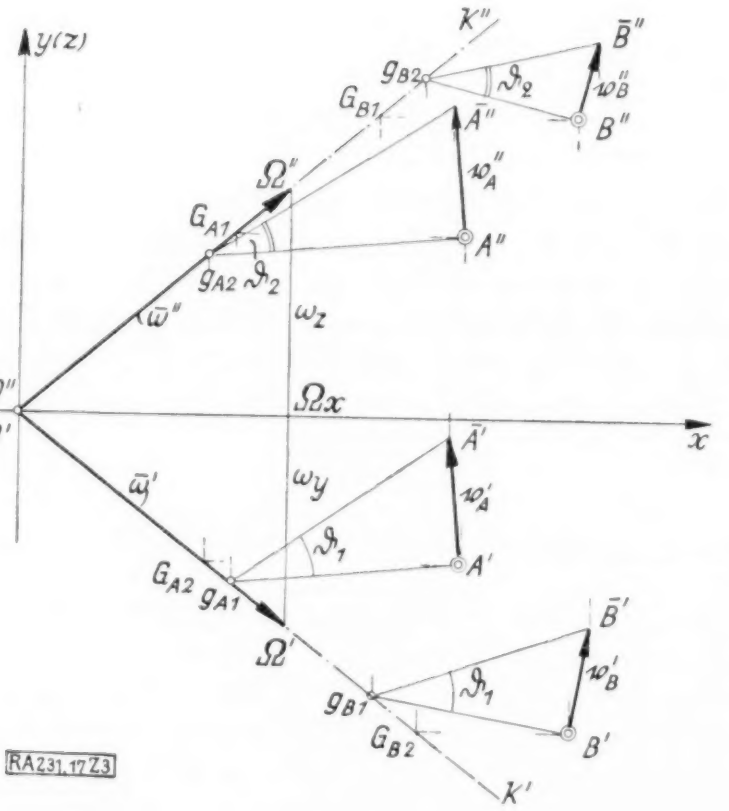


Abb. 3.

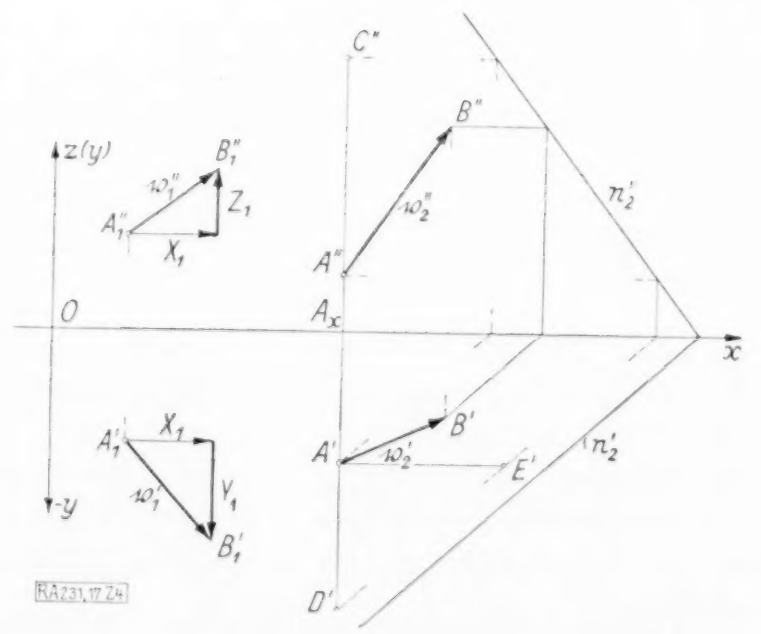


Abb. 4.

Voraussetzungen zu verzeichnen war, mag in dem bisherigen Fehlen geeigneter Konstruktionen für den Momentvektor und für das skalare Produkt begründet sein.

Die Mayor-v. Misessche Abbildung räumlicher Vektoren auf eine Ebene gab den wissenschaftlichen Anstoß zur Beschäftigung mit der graphischen Raummechanik und führte zu Lösungen, die aus den Arbeiten von R. v. Mises, K. Federhofer, W. Prager und H. Winter bekannt sind. Der Umweg über ein derartiges Abbildungsverfahren konnte allerdings nicht zu linienarmen und übersichtlichen Lösungen führen, da die insbesondere von K. Federhofer geförderte Methode zu der Darstellung der Raumgebilde im Grund- und Aufriß noch eine weitere Abbildung hinzunehmen mußte, die für die praktische Verwertung dem Ingenieur wegen der besonderen theoretischen Voraussetzungen wesensfremd ist und fernerhin auch bleiben dürfte.

Die Untersuchungen des Verfassers zur Aufstellung eines einfachen Lehrgebäudes der graphischen Raummechanik, über die bereits in seiner „Technischen Kinematik“ [1]) und auch in der ZaMM. [2]) einige vorläufige Angaben gemacht wurden, haben nun gezeigt, daß man ohne jedes besondere Abbildungsverfahren mit den elementarsten Grundlagen der darstellenden Geometrie auskommen und dabei trotz mehrfacher Kontrollen zu wesentlich einfacheren Lösungen gelangen kann, deren Hilfslinien im Gegensatz zu den zahlreichen Bild-, Antipol- und Antipolarenkonstruktionen der Federhoferschen Richtung auf dem Reißbrett zum größten Teil als horizontale und vertikale Linien besonders leicht zu zeichnen sind und damit auch größere Zeichengenauigkeit gewährleisten.

Der hier zur Verfügung stehende Platz gestattet nur einen kurzen Überblick über die Grundlagen des neuen Verfahrens. Über die im Vortrag an Hand von Lichtbildern gezeigten vielseitigen Anwendungen soll demnächst in dieser Zeitschrift und an anderer Stelle [3]) berichtet werden.

In Abb. 1 wird zum Vektor $\mathfrak{P}$ der Momentvektor $\mathfrak{M} = [\mathfrak{r}\mathfrak{P}] = [\overrightarrow{DP}, \mathfrak{P}] = \overrightarrow{\mu} \cdot c$ für den Bezugspunkt D gefunden, indem man die durch D zum Grundriß bzw. Aufriß parallel gelegten Ebenen E_1 bzw. E_2 verwendet und deren Durchstoßpunkte $P_{D_1}(g_{D_1}, G_{D_1})$ bzw. $P_{D_2}(G_{D_2}, g_{D_2})$ mit $\mathfrak{P}$ ermittelt. Unter Beachtung der oben eingeführten „Momentkonstante“ c, einer beliebigen positiven Strecke, gelangt man dann für die Grund- und Aufrißprojektionen $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}''$ oder μ' und μ'' bzw. für die Komponenten $\mathfrak{M}_x$, $\mathfrak{M}_y$, $\mathfrak{M}_z$ von $\mathfrak{M}$ nach den Koordinatenachsen des benutzten Rechtssystems zu den folgenden Beziehungen:

$$\mathfrak{M}_y = \mu_y \cdot c = -\overline{D''\overrightarrow{G}_{D_1}} \cdot Z = -\mathfrak{r}_1'' \cdot Z, \quad \mathfrak{M}_z = \mu_z \cdot c = \overline{D'\overrightarrow{G}_{D_2}} \cdot Y = \mathfrak{r}_2' \cdot Y \quad \ldots \quad (1a, b),$$

$$|\mathfrak{M}'| = |\mu'| \cdot c = \overline{D'g_{D_1}} \cdot |Z| = r_1' \cdot |Z|, \quad |\mathfrak{M}''| = |\mu''| \cdot c = \overline{D''g_{D_2}} \cdot |Y| = r_2'' \cdot |Y| \quad \ldots \quad (2a, b),$$

deren konstruktive Auswertung in Verbindung mit $\mu' \perp \overline{D'g_{D_1}}$, $\mu'' \perp \overline{D''g_{D_2}}$ und unter Beachtung von

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{|Z|}{c}, \quad \operatorname{tg} \vartheta_2 = \frac{|Y|}{c} \quad \ldots \quad (3a, b)$$

aus der Abb. 1 und 2 ersichtlich ist. Die Gl. (1a, b) gestatten dabei unter Berücksichtigung der Vorzeichen leicht die Entscheidung über die Vorzeichen von μ_y und μ_z, während die durch Gl. (2a, b) definierten vierten Proportionalen für μ' bzw. μ'' in mannigfacher Weise in der Figur untergebracht werden können, wie Abb. 1 in doppelter Ausführung zeigt. Eine andere Möglichkeit wurde bereits in dieser Zeitschrift (1931, S. 252) veröffentlicht.

Schließlich kann die Hauptfigur (Abb. 2 oben) ganz von der Ermittlung der Längen von μ' und μ'' entlastet werden, wenn diese in einer Hilfsfigur (Abb. 2 unten) mit $oN = c$, $\overline{NN_1} = |Z|$, $\overline{NN_2} = |Y|$, $\overline{od'} = \overline{D'g_{D_1}}$, $\overline{od''} = \overline{D''g_{D_2}}$ als Strecken $\mu' = d'd_1$ und $\mu'' = d''d_2$ konstruiert werden, falls man nicht das in der Abb. 2 ebenfalls angedeutete Antragen der Thetawinkel $\vartheta_1 = \sphericalangle NoN_1 = \sphericalangle D'g_{D_1}M_{D'}$ bzw. $\vartheta_2 = \sphericalangle NoN_2 = \sphericalangle D''g_{D_2}M_{D''}$ verwenden will. Die Hilfsfigur (Abb. 2 unten) kann auch als eine Art „Nomogramm“ ausgebildet werden, wodurch bei vielfacher Wiederholung der Momentvektorkonstruktion in der praktischen Anwendung wesentlich an Zeichenarbeit gespart und große Übersichtlichkeit in der Hauptfigur erzielt wird, wie im Vortrag ausgeführt wurde.

Abb. 3 zeige hier als einziges Beispiel die Ermittlung der Geschwindigkeitsverhältnisse bei einer sphärischen Bewegung, deren Achse k und Winkelgeschwindigkeit $\overline{\omega} = \overrightarrow{O\Omega}$ gegeben sind. So wird $\mathfrak{v}_A = \overrightarrow{AA} = [\overline{\omega}, \mathfrak{r}_A] = [\overline{\omega}, \overrightarrow{OA}] = [\overrightarrow{AO}, \overline{\omega}]$ als Momentvektor von $\overline{\omega}$ in k bezüg-

[1]) Technische Kinematik, Zwanglaufmechanik nebst Bewegungsgeometrie und Dynamik der Getriebe in Theorie und Praxis, Leipzig 1931, Joh. Ambr. Barth, S. 479 ff.

[2]) ZaMM. 1930, S. 618 ff. und 1931, S. 252.

[3]) Eine größere Abhandlung mit ca. 70 Abb. liegt bereits vor und soll als Habilitationsschrift verwendet werden. Man vergleiche ferner des Verfassers Beitrag im Jahresbericht 1929/31 der Vereinigten Technischen Schulen (Ingenieurschule) Zwickau.

lich A gefunden. Man erkennt in dem neuen Verfahren leicht eine wesentliche Verallgemeinerung der W. Hartmannschen „Thetawinkelkonstruktion“ der ebenen Bewegungsgeometrie auf die Bewegung im Raume, wobei die Scheitel der Thetawinkel auf k' bzw. k'' wandern und „ähnlich veränderliche“ Dreiecke liefern.

Die neuen Konstruktionen wurden dann zur Untersuchung des Geschwindigkeits- und Beschleunigungszustandes der allgemeinen Schraubenbewegung und eines dreigliedrigen Raumgetriebes herangezogen und in ihrer Zweckmäßigkeit bei derartigen „Zusammensetzungsaufgaben“ an Hand von Lichtbildern der Federhoferschen Lösungsmethode vergleichsweise gegenübergestellt. Die Zerlegung einer Kraft nach sechs vorgeschriebenen Richtungen an einem Raumfachwerk erwies endlich die Brauchbarkeit und Vorteile des neuen Verfahrens für derartige „Zerlegungsaufgaben“.

Schließlich möge an Hand der Abb. 4 erläutert werden, wie das skalare Produkt $\Pi = (\mathfrak{v}_1\, \mathfrak{v}_2)$ mit Hilfe der Beziehungen

$$\Pi = (x_E - x_A)\, X_1 = \overrightarrow{A'E'} \cdot X_1,\quad \Pi = (y_D - y_A)\, Y_1 = \overrightarrow{A'D'} \cdot Y_1,\quad \Pi = (z_C - z_A)\, Z_1 = \overrightarrow{A''C''} \cdot Z_1 \quad (4a, b, c)$$

leicht auffindbar ist, wenn man durch den Endpunkt B von $\mathfrak{v}_2$ die Normalebene n_2 senkrecht zu $\mathfrak{v}_1$ legt und die Durchstoßpunkte E, D, C derjenigen Geraden ermittelt, welche durch A parallel zu den Koordinatenachsen Ox, Oy, Oz gezogen werden. Es ist sofort erkennbar, daß $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ ihre Rollen vertauschen können und dann zu Formeln führen, die denen von Gl. (4a, b, c) analog nachgebildet sind. Eine weitere Vereinfachung wird bei der Wahl des Anfangspunktes A auf der Projektionsachse Ox erzielt. Die obige Konstruktion ist wesentlich einfacher als eine von W. Prager mit Hilfe der „Abbildungsmethode“ gegebene Lösung. Für die Anwendung der Abb. 4 sei auf die bereits zitierte größere Abhandlung hingewiesen.

231, 17

17. Über neue Integraphen der Askania-Werke[1]).

Von *Johannes Picht* in Berlin-Lankwitz.

Es wurde auf 3 von den Askania-Werken, Berlin-Friedenau, in Zusammenarbeit mit verschiedenen Wissenschaftlern entwickelte Integraphen hingewiesen, von denen die beiden ersten, der „Differentio-Integraph“[2]) nach Herrn von Harbou sowie der zur Ausführung des Integrals

$$\oint r(\varphi) \sin\varphi\, d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dienende Integraph nach Prof. Schweydar nur kurz erwähnt wurden. Eingehender wurde über den neuen als „Integrometer“ bezeichneten Universalintegraph (Abb. 1) berichtet, der die Ausführung der Integrationen

$$\int_\sigma\int \sin n\varphi\, d\varphi\, dr; \qquad \int_\sigma\int \cos n\varphi\, d\varphi\, dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\int_\sigma\int \frac{1}{r} \sin n\varphi\, d\varphi\, dr; \int_\sigma\int \frac{1}{r} \cos n\varphi\, d\varphi\, dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

$$\left[n = 1, 2, 3; \qquad \int_\sigma\int = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\varphi_1(r)}^{\varphi_2(r)} \right]$$

über eine durch die Polarkoordinaten (r, φ) gegebene Fläche σ gestattet. Anders ausgedrückt heißt dies, es lassen sich mit ihm die Integrale

$$\oint \cos n\varphi(r)\, dr; \qquad \oint \sin n\varphi(r)\, dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

$$\oint \frac{1}{r} \cos n\varphi(r)\, dr; \qquad \oint \frac{1}{r} \sin n\varphi(r)\, dr \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

auswerten, wo $\varphi = \varphi(r)$ ist. Bei der Konstruktion ist wesentlich, daß die Berücksichtigung der Winkelfunktion (sin bzw. cos) nicht — wie sonst üblich — durch ein entsprechendes

[1]) Eine vollständige Veröffentlichung des Vortrages erscheint in der Ztschr. f. Instrkde.

[2]) E. v. Harbou, Ztschr. f. angew. Math. u. Mech. **10**, 1930 (H. 6).

„Schrägstellen" des Zählrädchens erreicht wird, sondern durch eine Änderung seines Abstandes vom Mittelpunkt einer Übertragungsscheibe, so daß dieser Abstand dem $\cos nq$ bzw. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - nq\right) = \sin nq$ entspricht. Das Zählrädchen verschiebt sich hierbei längs des „Fahrarmes" und seine Ebene bleibt stets zur Übertragungsscheibe tangential. Dies wird dadurch erreicht, daß ein Kreis, auf dessen Peripherie sich das Zählrädchen befindet, an einem zweiten

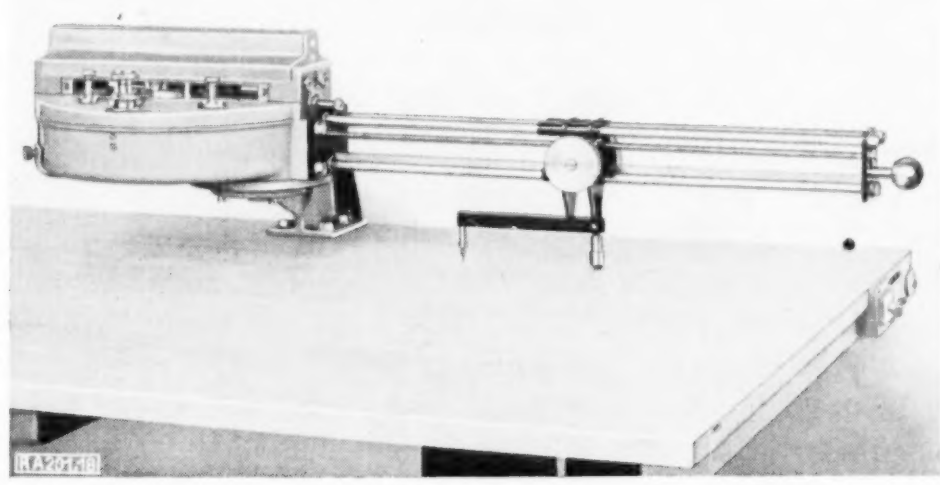
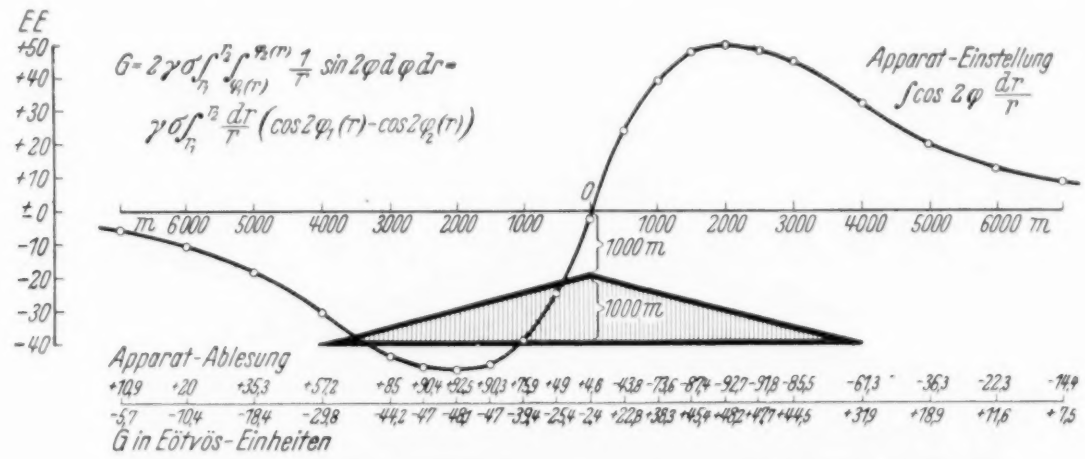


Abb. 1.

Kreis mit doppeltem Radius innen abrollt. Das Zählrädchen überträgt seine Umdrehung durch Reibung auf eine Zählscheibe, wobei das Zählrädchen wieder stets senkrecht zum Radius der Zählscheibe steht. Zur Ausführung der Integrale (3) bzw. (5) läßt sich durch Einschalten von Zahnrädern erreichen, daß sich die Zählscheibe in Richtung der Achse des Zählrädchens so verschiebt, daß dessen Abstand vom Mittelpunkt der Zählscheibe zu r proportional ist. — Das Spiel der Zahnräder wird durch eine stets in gleicher Richtung wirkende Feder ausgeschaltet. — Außer den bereits erwähnten Integrationen lassen sich mit diesem Apparat noch die Integrale

$$\int_{a_1}^{a_2} f(a) \sin a \, da \quad \text{und} \quad \int_{a_1}^{a_2} f(a) \cos a \, da \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$



Apparat- Ablesung:	Konstante:	Gravitation- Konstante: γ	Dichte Unterschied: σ	G in Eötvos- Einheiten
+92,5	0,00784	$66{,}5 \cdot 10^{-9}$	-1	$1 \cdot 10^{9} = -48{,}1$

RA 231.18

Abb. 2.

wo $f(a)$ eine beliebig gegebene Funktion ist, auswerten. Die Genauigkeit des Apparates, die, je nach der Übung der ausführenden Person, etwa 1 bis 2 vH beträgt, wurde durch zahlreiche Beispiele gezeigt, von denen eins in Abb. 2 wiedergegeben ist. 231, 18

18. Über nomographische Auflösung von Differentialgleichungen.

Von *L. Holzer* in Graz.

Ausgehend vom Begriff der Integration einer Funktionenskala zeigt der Vortragende deren Anwendung auf die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen mit getrennten Variabeln und auf partielle Differentialgleichungen. Weiter weist er hin, wie ein der Nomo-

graphie ähnliches Verfahren die Näherungslösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen der Form $y' = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\,\psi_i(y)$, zu denen die meisten gebräuchlichen Typen zählen, sehr erleichtert. Weiter wird gezeigt, wie für die Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $y'' + p(x)\,y = 0$ ein Fluchtliniennomogramm mit Trägern von x, y und den beiden Integrationskonstanten C_1, C_2 angenähert konstruiert werden kann, ohne die Lösung der Gleichung überhaupt zu kennen. Das letztgenannte Verfahren ist weitgehender Verallgemeinerung fähig. 231, 19

19. Über Markoffsche Ketten.

Von *Günther Schulz* in Berlin.

In einer Reihe von Arbeiten, die in den Jahren 1906 bis 1913 erschienen sind, hat A. Markoff folgende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung behandelt: Man hat k Urnen, die mit den Nummern 1 bis k bezeichnet sind und die in beliebigem Mischungsverhältnis Lose enthalten, die ihrerseits ebenfalls eine der Nummern 1 bis k tragen. Die Ziehungen gehen nun so vonstatten, daß zu Beginn aus einer weiteren Urne, die ebenfalls Lose mit den Nummern 1 bis k enthält, gezogen wird. Trägt das gezogene Los die Nummer x, so wird für die nächste Ziehung die Urne mit der Nummer x benutzt; wird aus dieser ein Los mit der Nummer y gezogen, dann ist für die darauffolgende Ziehung die Urne mit der Nummer y zu nehmen usw. („Verkettete" Ziehungen). Gegeben ist dabei die Wahrscheinlichkeit $w_0(x)$, aus der „Anfangsurne" ein Los mit dem Merkmal x zu ziehen, und eine Matrix $\mathfrak{B}$ von Wahrscheinlichkeiten $v(x; y)$, aus der Urne y ein Los mit dem Merkmal x zu ziehen. Markoff fragt nun nach der Wahrscheinlichkeit $W_n(X)$ dafür, daß die Summe der Merkmale des ersten, zweiten, ... n-ten Zuges einen bestimmten Wert X hat. Unter einschränkenden Annahmen für die Elemente der Matrix $\mathfrak{B}$ hat Markoff gezeigt, daß $W_n(X)$ für große n gegen eine Gaußsche e^{-x^2}-Verteilung konvergiert.

Für diese Tatsache wird hier ein neuer Beweis gegeben, der von den erwähnten Einschränkungen frei ist. Der Beweis benutzt die Theorie der Übergangswahrscheinlichkeiten, die in voller Allgemeinheit erstmalig Herr v. Mises, gestützt auf Sätze von Frobenius über Matrizen mit nicht-negativen Elementen, entwickelt und bei der Ausschaltung der Ergodenhypothese aus der theoretischen Physik angewendet hat. (Vgl. hierzu R. v. Mises, Vorlesungen aus dem Gebiete der Angewandten Mathematik, I. Band: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Wien 1931, S. 532 ff., insbesondere Satz III, IV, V.) Dort finden sich Sätze über das Verhalten von $w_n(x)$, der Wahrscheinlichkeit, bei der n-ten Ziehung ein Los mit dem Merkmal x zu erhalten, bei großem n.

Um nun für die Untersuchung des asymptotischen Verhaltens von $W_n(X)$ die Sätze über das asymptotische Verhalten von $w_n(x)$ benutzen zu können, wird statt $W_n(X)$ die zweidimensionale Verteilung $W_n(X, x)$ eingeführt. $W_n(X, x)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Summe der Merkmale der ersten, zweiten, ... n-ten Ziehung den Wert X hat und gleichzeitig das Merkmal der n-ten Ziehung x ist. Es gilt die Rekursionsformel

$$W_n(X, x) = \sum_y W_{n-1}(X - x, y)\,v(x; y)\,; \quad \sum_x W_n(X, x) = W_n(X)$$

mit der Anfangsbedingung

$$W_1(X, x) = w_1(x) \quad \text{für } X = x$$
$$= 0 \quad \text{für } X \neq x\,.$$

Beim Beweise werden die entsprechenden Rekursionsformeln für die Momente von $W_n(X, x)$ aufgestellt. Auf die aufsummierten Formeln wird dann der Satz von Toeplitz über lineare Mittelbildungen angewendet; es läßt sich zeigen, daß die Momente von $W_n(X)$ gegen die Momente einer Gaußschen Verteilung konvergieren, was nach dem Stetigkeitssatz des Momentenproblems die Konvergenz der Verteilung $W_n(X)$ selbst gegen eine Gaußsche Verteilung gewährleistet. Da als Elemente der Matrix $\mathfrak{B}$ auch Nullen zugelassen sind, sind hier — ebenso wie bei der Konvergenz von $w_n(x)$ — drei Fälle zu unterscheiden.

I) Ist in einer der Matrizen aus der Folge $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^2, \mathfrak{B}^3, \ldots$ mindestens ein Element in der Hauptdiagonale von 0 verschieden, ohne daß die betreffende Matrix zerfällt, dann sind Mittelwert und Streuung der Gaußschen Limes-Verteilung von $W_n(X)$ von der Ausgangsverteilung $w_0(x)$ unabhängig.

II) Zerfällt $\mathfrak{B}$ total oder III) zerfällt $\mathfrak{B}$ nicht und sind die Bedingungen von I) nicht erfüllt, dann sind Mittelwert und Streuung abhängig von $w_0(x)$.

Hierauf sind alle möglichen Fälle zurückführbar. 231, 20

Bemerkung zur Interpolation und zur Näherungstheorie der Balkenbiegung.

Von *G. Pólya* in Zürich.

Vergleichen wir miteinander zwei verschiedene Gleichgewichtslagen eines an beiden Enden eingespannten, homogenen, schwach gebogenen Balkens. In der ersten Gleichgewichtslage ist der Balken innerhalb der Auflager unbelastet, also höchstens durch die Eigenspannungsmomente verbogen, in der zweiten trägt er irgendwie verteilte Lasten. Um von der ersten in die zweite Lage zu gelangen, muß sich der Balken seiner ganzen Länge nach senken, d. h. jeder seiner Punkte muß sich dabei abwärts bewegen. Diesen Satz will ich aus der in der Technik gebräuchlichen Bernoulli-Eulerschen Näherungstheorie der Balkenbiegung herleiten. Selbst wenn man das Resultat ohne weiteres als plausibel ansieht, ist es nicht selbstverständlich, daß dessen Herleitung aus der besagten Theorie gelingt, denn diese ist ja bloß eine Näherungstheorie; das Gelingen der Herleitung ist m. E. als eine Art qualitative Bestätigung der Theorie zu bewerten.

Der Beweis des ausgesprochenen Satzes ergibt sich besonders einfach aus einer geläufigen Interpolationsformel von Hermite[1]). Die Hermitesche Interpolationsformel ist sehr allgemein, sie umfaßt u. a. die Taylorsche Formel und die Lagrangesche Interpolationsformel, beide mit dem Restglied; immerhin genügt sie nicht zur ähnlichen Behandlung analoger Fragen aus der Balkentheorie. Eine noch allgemeinere Interpolationsformel wurde von Birkhoff aufgestellt[2]); sie ist aber mit einer gewissen Schwierigkeit behaftet, indem vor ihrer Anwendung festgestellt werden muß, ob die Interpolation „normal" ist oder nicht. Ich werde diese Schwierigkeit in Nr. 1 in einem Fall, der für alle analogen Anwendungen auf die Balkentheorie genügt, beheben, und dann in Nr. 2 den eingangs ausgesprochenen Satz beweisen und überhaupt den Zusammenhang zwischen der Interpolationsaufgabe und der Balkentheorie erläutern.

1. **Eine Interpolationsformel.** Ich betrachte im folgenden ein Intervall mit den Endpunkten a und b, $a<b$; ich werde es mit $[a, b]$ oder mit (a, b) bezeichnen, je nachdem es als abgeschlossen oder offen, d. h. mit oder ohne Einschluß der Endpunkte aufgefaßt wird (In der Anwendung wird sich der Balken diesem Intervall entlang erstrecken.)

Ich betrachte ferner eine in $[a, b]$ n-mal differenzierbare reelle Funktion $\varphi(x)$, die in den Endpunkten a und b den folgenden n Bedingungen unterworfen ist:

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(k_1)}(a)=A_1, \quad \varphi^{(k_2)}(a)=A_2, \quad \ldots \quad \varphi^{(k_\alpha)}(a)=A_\alpha \\ \varphi^{(l_1)}(b)=B_1, \quad \varphi^{(l_2)}(b)=B_2, \quad \ldots \quad \varphi^{(l_\beta)}(b)=B_\beta \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die Anzahl der Bedingungen ist, wie gesagt,

$$\alpha+\beta=n$$

und die ganzen Zahlen $k_1, \ldots, k_\alpha, l_1, \ldots, l_\beta$ sollen den Ungleichungen

$$0\leqq k_1<k_2<\ldots<k_\alpha\leqq n-1, \quad 0\leqq l_1<l_2<\ldots<l_\beta\leqq n-1$$

genügen. Wenn die vorgegebenen Konstanten $A_1, \ldots, A_\alpha, B_1, \ldots, B_\beta$ sämtlich als Null angenommen werden, entsteht aus (1) das „homogene" Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \varphi^{(k_1)}(a)=0, \quad \varphi^{(k_2)}(a)=0, \quad \ldots \quad \varphi^{(k_\alpha)}(a)=0 \\ \varphi^{(l_1)}(b)=0, \quad \varphi^{(l_2)}(b)=0, \quad \ldots \quad \varphi^{(l_\beta)}(b)=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

Wir wollen die Anzahl derjenigen unter den Zahlen $k_1, \ldots, k_\alpha, l_1, \ldots, l_\beta$, die $=p$ ausfallen, mit m_p bezeichnen (p ganz, $0\leqq p\leqq n-1$). Anders gesagt, es beziehen sich m_p unter den n Bedingungen (1) auf $\varphi^{(p)}(x)$. Es ist $m_p=0$ oder 1 oder 2, und

$$m_0+m_1+m_2+\ldots+m_{n-1}=n.$$

Es werde noch zur Abkürzung

$$m_0+m_1+\ldots+m_p=M_p$$

gesetzt; hiernach ist $M_{n-1}=n$. Ferner sei definitorisch $M_{-1}=0$ gesetzt. Es gilt dann allgemein für $p=0, 1, 2, \ldots n-1$

$$M_p=M_{p-1}+m_p.$$

[1]) Oeuvres, Bd. II, S. 432 bis 443.
[2]) Transactions of the American Math. Soc. Bd. 7 (1906) S. 107 bis 136.

I. Wenn die ganzen Zahlen $k_1, \ldots, k_\alpha, l_1, \ldots, l_\beta$ der Bedingung

$$M_0 \geqq 1,\ M_1 \geqq 2,\ \ldots\ M_p \geqq p+1,\ \ldots\ M_{n-2} \geqq n-1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

genügen, und die Funktion $q(x)$ die Bedingungen (2) erfüllt, so verschwindet jede der Funktionen

$$q(x),\ q'(x),\ q''(x),\ \ldots \quad q^{(n-1)}(x)$$

in mindestens einem Punkte des abgeschlossenen Intervalles $[a, b]$.

Leichter als die Behauptung des Satzes I ist die folgende vollständigere Behauptung zu beweisen: $q^{(p)}(x)$ verschwindet in mindestens $M_{p-1}-p$ verschiedenen Punkten des offenen Intervalles (a, b) für $p=0, 1, 2, \ldots n-1$. Diese Behauptung ist für $p=0$, gemäß der Definition von M_{-1}, nichtssagenderweise richtig. Ist sie für ein bestimmtes p, $0 \leqq p \leqq n-1$, richtig, so hat $q^{(p)}(x)$, gemäß (2), im Intervalle $[a, b]$ mindestens

$$(M_{p-1}-p)+m_p = M_p - p$$

verschiedene Nullstellen, und diese Zahl ist, gemäß (3), mindestens 1; somit enthält die jetzige Behauptung die des Satzes I. Ist aber die jetzige Behauptung für ein bestimmtes p richtig, so folgt aus dem Rolleschen Satze, daß $q^{(p+1)}(x) = (q^{(p)}(x))'$ höchstens um Eins weniger verschiedene Nullstellen in (a, b) besitzt, als $q^{(p)}(x)$ in $[a, b]$, daß es also mindestens

$$(M_p - p) - 1 = M_p - (p+1)$$

verschiedene Nullstellen im offenen Intervalle (a, b) besitzt. Hiermit ist Satz I durch vollständige Induktion bewiesen.

I*. Wenn die ganzen Zahlen $k_1, \ldots, k_\alpha, l_1, \ldots, l_\beta$ der Bedingung (3) genügen, und die Funktion $q(x)$ außer (2) noch die weitere Bedingung erfüllt, daß sie in einem Punkte des offenen Intervalles (a, b) verschwindet, so verschwindet auch $q^{(p)}(x)$ in mindestens einem Punkte von (a, b).

Anstatt Satz I* sei sofort die folgende vollständigere Behauptung bewiesen: $q^{(p)}(x)$ verschwindet in mindestens $M_{p-1}-p+1$ verschiedenen Punkten von (a, b) für $p=0, 1, 2, \ldots n$. Diese Behauptung besagt für $p=0$ nur, was in der Voraussetzung direkt gefordert wurde; setzen wir sie als schon bewiesen voraus für ein bestimmtes p, $p \leqq n-1$. Dann hat, gemäß (2), $q^{(p)}(x)$ im abgeschlossenen $[a, b]$ mindestens

$$(M_{p-1}-p+1)+m_p = M_p - p + 1$$

verschiedene Nullstellen, und folglich hat $q^{(p+1)}(x)$, gemäß dem Rolleschen Satze, mindestens

$$M_p - p$$

verschiedene Nullstellen in (a, b). Hiermit ist Satz I* bewiesen[3]).

II. Die Interpolationsaufgabe, ein Polynom $q(x)$ vom Höchstgrade $n-1$ zu finden, das den n Gleichungen (1) bei vorgegebenen rechten Seiten $A_1, \ldots, A_\alpha, B_1, \ldots, B_\beta$ genügt, ist lösbar, und zwar nur auf eine Art lösbar, wenn die ganzen Zahlen $k_1, \ldots, k_\alpha, l_1, \ldots, l_\beta$ die Bedingung (3) erfüllen. Wenn hingegen (3) nicht erfüllt ist, so hat diese Interpolationsaufgabe entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Man könnte Satz I* kurz dahin zusammenfassen, daß das „normale" Verhalten der Interpolationsaufgabe an die Bedingung (3) gebunden ist[4]).

Die Bedingungen (1) bilden ein System von n linearen Gleichungen für die zu bestimmenden n Koeffizienten des Polynoms $q(x)$. Unter allen Gleichungssystemen, die aus (1) durch Variieren der rechten Seiten $A_1, \ldots, A_\alpha, B_1, \ldots, B_\beta$ hervorgehen, ist in bezug auf eindeutige Lösbarkeit das homogene System (2) „tonangebend". Daher dürfen wir den Satz II in folgender äquivalenten Form aussprechen: Für die Existenz eines nicht identisch verschwindenden Polynoms $q(x)$ vom Höchstgrad $n-1$, das den Gleichungen (2) genügt, ist die **Nichterfüllung** der Bedingung (3) notwendig und hinreichend.

[3]) Für eine in $[a, b]$ (etwa) analytische, nicht identisch verschwindende Funktion $q(x)$ hätte die in diesem Fall gültige genauere Fassung des Rolleschen Satzes die Existenz mindestens einer Nullstelle ungerader Ordnung für $q^{(p)}(x)$ ergeben.

[4]) Birkhoff gebraucht a. a. O.[2]) das Wort „normal" in einem verwandten aber verschiedenen Sinne; vgl. insbesondere S. 113 bis 114.

a) Wenn die Bedingung (3) nicht erfüllt ist, so gibt es ein p, $0 \leqq p \leqq n-2$, so daß

$$M_p < p+1$$

ist. Man wähle $\varphi(x)$ als ein Polynom p-ten Grades; dann sind diejenigen Gleichungen des Systems (2), in welchen $\varphi^{(p+1)}(x)$, $\varphi^{(p+2)}(x)$, ... vorkommen, ohne weiteres befriedigt. Es bleiben noch diejenigen zu befriedigen, in denen $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, ... $\varphi^{(p)}(x)$ vorkommen. Ihre Anzahl ist

$$m_0 + m_1 + \ldots + m_p = M_p < p+1$$

und sie enthalten linear und homogen $p+1$ verfügbare Koeffizienten von $\varphi(x)$. Sie können daher durch ein nicht identisch verschwindendes $\varphi(x)$ befriedigt werden, was zuerst zu zeigen war.

b) Wenn die Bedingung (3) durch die Zahlen $k_1, \ldots, k_\alpha$, $l_1, \ldots, l_\beta$ und das Gleichungssystem (2) durch das Polynom

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}$$

erfüllt ist, so hat, gemäß Satz I,

$$\varphi^{(n-1)}(x) = (n-1)!\, c_{n-1}$$

mindestens eine Nullstelle in $[a, b]$; somit ist $c_{n-1} = 0$ und

$$\varphi^{(n-2)}(x) = (n-2)!\, c_{n-2}.$$

Diese Funktion soll aber, wieder gemäß Satz I, mindestens einmal in $[a, b]$ verschwinden; somit ist $c_{n-2} = 0$. So weiterfahrend findet man, daß $\varphi(x)$ identisch verschwindet, w. z. b. w.

III. Es sei die Bedingung (3) erfüllt. Zu einer gegebenen, in $[a, b]$ n-mal differenzierbaren, reellen Funktion $f(x)$ bestimme man das Polynom $H(x)$ vom Höchstgrad $n-1$, das den n Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} H^{(k_1)}(a) = f^{(k_1)}(a),\ H^{(k_2)}(a) = f^{(k_2)}(a),\ \ldots,\ H^{(k_\alpha)}(a) = f^{(k_\alpha)}(a) \\ H^{(l_1)}(b) = f^{(l_1)}(b),\ H^{(l_2)}(b) = f^{(l_2)}(b),\ \ldots,\ H^{(l_\beta)}(b) = f^{(l_\beta)}(b) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

genügt, ferner das Polynom n-ten Grades

$$N(x) = \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

mit dem höchsten Koeffizienten $1/n!$, das den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} N^{(k_1)}(a) = N^{(k_2)}(a) = \ldots = N^{(k_\alpha)}(a) = 0 \\ N^{(l_1)}(b) = N^{(l_2)}(b) = \ldots = N^{(l_\beta)}(b) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

genügt. Dann ist $N(x)$ von konstantem Vorzeichen in (a, b). Ferner kann man zu jedem Punkt x aus (a, b) einen Punkt ξ ebenfalls aus (a, b) finden, so daß

$$f(x) = H(x) + N(x) f^{(n)}(\xi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

gilt.

Formel (6) ist eine Interpolationsformel mit Restglied; sie bildet das Hauptziel der bisherigen Untersuchung. Wenn

$$m_0 = m_1 = \ldots = m_{n-1} = 1,\ \alpha = n,\ \beta = 0,$$
$$k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ \ldots\ k_n = n-1$$

ist (die l gibt es dann gar nicht), so geht (6) in die Taylorsche Formel mit Restglied über. $H(x)$ ist eine Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

$N(x)$ eine der nicht-homogenen Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

(daher die Bezeichnungen). — Zum Beweise von Satz III bemerke man:

a) $H(x)$ ist gemäß Satz II eindeutig durch die Bedingungen (4) bestimmt.

b) Wird

$$N(x) = \frac{x^n}{n!} + \varphi(x)$$

gesetzt, so ergibt (5) zur Bestimmung des Polynoms $\varphi(x)$ vom Höchstgrade $n-1$ ein System von n Gleichungen von der Form (1), welches $\varphi(x)$, gemäß Satz II, eindeutig bestimmt.

c) $N(x)$ hat keine Nullstellen in (a, b). Hätte es nämlich eine, so würde es aus Satz I* folgen, daß

$$N^{(n)}(x) = 1$$

in einem Punkte von (a, b) verschwindet, was offenbar nicht der Fall ist.

d) Es sei x_0 ein Punkt von (a, b). Dann kann man, da ja $N(x_0) \neq 0$ ist, eine Konstante C so bestimmen, daß

$$f(x_0) = H(x_0) + C N(x_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

gilt. Die Funktion

$$q(x) = f(x) - H(x) - C N(x)$$

erfüllt, wegen (4) und (5), die Bedingungen (2) und hat des weiteren, gemäß (9), im Punkte x_0 von (a, b) eine Nullstelle. Satz I* ergibt die Existenz eines Punktes ξ von (a, b), so daß

$$q^{(n)}(\xi) = f^{(n)}(\xi) - C = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ist; zur Berechnung von $q^{(n)}(x)$ beachte man, daß $H(x)$ die Gl. (7) und $N(x)$ (8) befriedigt. Wird der der Gl. (10) entnommene Wert von C in (9) eingesetzt, so ergibt sich die herzuleitende Formel (6) für $x = x_0$, wobei x_0 in (a, b) willkürlich gewählt werden darf.

Die hiermit bewiesene Formel (6) kreuzt sich mit der Hermiteschen in dem Spezialfall, in welchem

$$k_1 = 0,\ k_2 = 1,\ \ldots,\ k_\alpha = \alpha - 1,\ l_1 = 0,\ l_2 = 1,\ \ldots,\ l_\beta = \beta - 1$$

ausfällt. Sie paßt in den Rahmen der noch allgemeineren Birkhoffschen Formel; es ist der Birkhoffschen Arbeit gegenüber nicht nur die Herleitung, sondern vor allem die Aufklärung der Rolle der Bedingung (3) neu. (Vgl. a. a. O.)

2. **Anwendung auf die Balkenbiegung.** Die Differentialgleichung für die Gleichgewichtslage des homogenen Balkens schreibe ich in der Form

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = q(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

y bedeutet die vertikale Verschiebung des zur Abszisse x gehörigen Punktes, wobei Abwärtsverschiebungen positiv gerechnet sind; $q(x)$ ist der Belastung pro Längeneinheit proportional. Wir nehmen eine nach abwärts wirkende Last, also

$$q(x) > 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

an. Wichtige besondere Fälle sind der unbelastete und der gleichmäßig belastete Balken, diese Fälle gehören bzw. zu den Gleichungen

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7').$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8').$$

(7'), (8') sind Spezialfälle von (7), (8) für $n = 4$. Somit werden die Resultate der Nr. 1 anwendbar; Satz II kann uns über die zulässigen Randbedingungen, Satz III über den qualitativen Verlauf Aufschluß geben, wie es sofort ausgeführt werden soll.

Physikalische Aufgaben führen meistens zur Bestimmung einer Partikularlösung von (11) durch die Angabe von je zwei der folgenden 4 Größen: Verschiebung, Richtung, Moment und Querkraft für jeden der beiden Endpunkte. Wenn die Endpunkte bei den Abszissen a und b liegen und die gesuchte Partikularlösung mit $y = f(x)$ bezeichnet wird, so werden also insgesamt 4 von den folgenden 8 Größen

$$f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ f'''(a),\ f(b),\ f'(b),\ f''(b),\ f'''(b) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

vorgegeben. Um die Sachlage von der mathematischen Seite her zu überblicken, betrachten wir allgemeiner solche Randbedingungen, die in der Vorgabe von irgendwelchen 4 unter den in (13) aufgezählten 8 Größen bestehen und fragen wir: Welche Randbedingungen sichern die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung?

Die allgemeine Lösung von (11) entsteht aus einer speziellen Lösung von (11) durch Hinzufügen der allgemeinen Lösung von (7'), d. h. eines beliebigen Polynoms $q(x)$ vom Höchstgrad 3; die Randbedingung ergibt für $q(x)$ ein System von 4 Gleichungen von der Gestalt (1). Die gestellte Frage ist also durch den Spezialfall $n=4$ des Satzes II schon vollständig beantwortet: Wenn die Auswahl der 4 vorzugebenden Größen aus (13) die Bedingung (3) erfüllt, so existiert eine und nur eine Lösung, wenn sie aber diese Bedingung (3) nicht erfüllt, so gibt es entweder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Wenn wir z. B. einen an beiden Enden eingeklemmten Balken betrachten, so geben wir die 4 Größen $f(a)$, $f'(a)$, $f(b)$, $f'(b)$ vor und wir können die Existenz einer eindeutig bestimmten Lösung aus physikalischen Gründen verstehen. Wir können aus Satz II die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung beweisen durch die Verifikation der Bedingungen (3): Es ist jetzt, mit den Bezeichnungen der Nr. 1,

$$\alpha=\beta=2, \qquad k_1=l_1=0, \qquad k_2=l_2=1,$$
$$m_0=m_1=2, \qquad m_2=m_3=0, \qquad M_0=2, \qquad M_1=M_2=M_3=4$$

und die Bedingung (3) ist erfüllt, da ja

$$2\geqq 1, \quad 4\geqq 2, \quad 4\geqq 3.$$

Die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung würde sich übrigens in diesem Falle auch aus der Untersuchung von Hermite a. a. O. ergeben. Satz II führt aber in allen analogen Fällen zur Entscheidung, und man stellt mit Leichtigkeit folgendes fest: Randbedingungen von der betrachteten Art gibt es offenbar $\binom{8}{4}=70$; von diesen haben nur 42 die Eigenschaft, eine eindeutig bestimmte Lösung sichern zu können, und diese Eigenschaft ergibt sich nur in 5 Fällen unmittelbar aus dem Ergebnis von Hermite[5]).

Um nun ein Beispiel zum Satz III zu haben, kehren wir zur eingangs gestellten Frage über die zwei Gleichgewichtslagen des an beiden Enden eingeklemmten Balkens zurück. Die Gleichgewichtslage des unbelasteten Balkens wird durch eine Lösung der homogenen Gl. (7'), also durch ein Polynom 3. Grades $H(x)$ gegeben, die des belasteten Balkens durch eine Lösung $y=f(x)$ von (11), und die gleiche Einklemmung an den beiden Enden wird durch die Gleichungen

$$H(a)=f(a), \qquad H'(a)=f'(a), \qquad H(b)=f(b), \qquad H'(b)=f'(b)$$

ausgedrückt, die also einen Spezialfall der in Satz III auftretenden Gl. (4) bilden. Das daselbst auftretende Polynom $N(x)$ ist jetzt, wie es sich leicht aus dem gegenwärtigen Spezialfall des Systems (5) ergibt, von der Gestalt

$$N(x)=\frac{(x-a)^2(x-b)^2}{24},$$

und mit Beachtung hiervon und der Differentialgleichung (11) läßt sich (6) so schreiben:

$$f(x)-H(x)=\frac{(x-a)^2(x-b)^2}{24}q(\xi).$$

Hieraus ist auf Grund von (12) evident, daß die Verschiebung $f(x)$ im belasteten Fall größer ist als die Verschiebung $H(x)$ im unbelasteten Fall, w. z. b. w.[6]).

Wenn man an Stelle der Einklemmung der beiden Enden den homogenen Balken unter anderen Randbedingungen behandelt, so kommt man zu einem analogen qualitativen Ergebnis durch eine analoge Verwendung des Satzes III, wobei insbesondere dessen auf $N(x)$ bezüglicher Teil in Wirkung tritt. Die entsprechenden Fragen über den inhomogenen Balken benötigen eine Erweiterung der Untersuchung der Nr. 1 bzw. deren Vereinigung mit einer an anderer Stelle durchgeführten Untersuchung[7]). Ähnliche Fragen über die Plattenbiegung usw. legen die Ausdehnung auf lineare partielle Differentialgleichungen nahe; in formaler Hinsicht ist der Weg ja klar, aber es bestehen wohl noch sehr beträchtliche sachliche Schwierigkeiten.

165

[5]) Die Zahlen 70, 42, 5 reduzieren sich auf 38, 22, 3, wenn solche Fälle, die durch Vertauschung der beiden Balkenenden ineinander übergehen, nicht unterschieden werden.

[6]) Der Beweis läßt sich unter Beachtung der an Satz I* angehängten Anmerkung [3]) auch unter der Bedingung $q(x)\geqq 0$, $q(x)\not\equiv 0$ erbringen.

[7]) G. Pólya, Transactions of the American Math. Soc. Bd. 24 (1922) S. 312 bis 324; wie beide Untersuchungen zu vereinigen sind, geht aus der Parallelisierung des Gedankenganges hervor. Vgl. noch D. V. Widder, daselbst, Bd. 26 (1924) S. 385 bis 394.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Tragwerke auf elastisch nachgiebiger Unterlage[1]).

Von *P. Neményi* in Berlin.

I. Einleitende Übersicht.

Bei allen Problemen, wo ein Tragkörper nicht in einzelnen Punkten abgestützt ist, sondern auf einer größeren Länge bzw. Fläche auf dem Baugrund oder auf einer anderen Unterlage stetig aufruht, hat man es zunächst mit einem äußerlich unendlich vielfach statisch unbestimmten System zu tun. Die Auflagerkräfte sind somit abhängig von der Formänderung sowohl des Tragwerks als auch der Unterlage, und die Bestimmung der Auflagerkräfte stößt damit auf sehr große Schwierigkeiten.

Wenn man nach dem Vorgang von Schwedler die zunächst willkürliche Annahme macht, daß an jeder Stelle die lotrechte Auflagerpressung p einfach proportional mit der örtlichen Einsenkung w der Unterlage ist, also daß

$$p = k \cdot w\,,$$

dann läßt sich indessen das Problem auf eine lineare Differentialgleichung zurückführen, deren Lösung nur unwesentlich schwieriger ist als die Behandlung des entsprechenden Balken- bzw. Plattenfalles bei gegebener Belastung mit Einzelstützungen. Diese vereinfachte Theorie bildet eine Art Gegenstück zur Theorie der Eigenschwingungen der entsprechend geformten Balken bzw. Platten quer zu ihrer Mittelebene. Die so aufgefaßte Theorie des elastisch gebetteten Balkens geht im wesentlichen auf Schwedlers Vorarbeiten und Zimmermanns eingehende Bemühungen zurück, wobei zunächst vorwiegend die Aufgaben des Eisenbahnoberbaues bearbeitet wurden. Allmählich hat aber auch im Wasserbau und Grundbau die eindimensionale Theorie Eingang gefunden. Im Hinblick auf den Straßenbau und auf die Flachgründungen wurde dann dieselbe Theorie auch für Platten ausgebaut. Die ganze Theorie hat in den Nachkriegsjahren einen bemerkenswerten Aufschwung genommen, so daß es an der Zeit erscheint, eine nach einheitlichen, neuzeitlichen Gesichtspunkten gegliederte kurze Übersicht über das gesamte Schrifttum zu geben.

Im Kapitel II soll die eindimensionale Theorie mit allen ihren neuesten Verallgemeinerungen und Abwandlungsmöglichkeiten kurz skizziert werden. Im Kapitel III wird kurz das achsensymmetrische Problem behandelt, Kapitel IV bringt schließlich weitere Probleme, wobei der allgemeine Plattenansatz mit zwei Koordinaten angewandt werden muß. Alle diese Kapitel beschränken sich bewußt auf Folgerungen aus dem Schwedlerschen Grundansatz.

Kapitel V bringt dagegen eine physikalische Betrachtung des Schwedlerschen Grundansatzes, eine kurze technisch-physikalische Studie über die Wahl der Konstanten k und etwaiger ergänzender Annahmen und zum Schluß eine kritische Übersicht über die Bestrebungen an Stelle des Schwedlerschen Ansatzes eine bessere oder genauere Untersuchungsmethode zu setzen.

II. Das eindimensionale Problem.

(Balken auf elastischer Unterlage.)

1. Der freie nur stetig gestützte Balken.

Es sollen hier nur solche Träger behandelt werden, die außer der stetigen Stützung keine Stützung aufweisen und nicht als Teile von mehrfach zusammenhängenden Tragwerken aufzufassen sind, mit anderen Worten soll auf der ganzen Länge des zu untersuchenden Trägers ein konstanter elastischer Widerstand, der in dem Bettungsbeiwert k zum Ausdruck kommt, vorhanden sein. Diese Theorie, die von Zimmermann[2]) für den Eisenbahnoberbau in außerordentlich eingehender Weise ausgearbeitet wurde, kann mit mannigfachen Methoden begründet werden.

[1]) Freie Bearbeitung der Vorlesung des Verfassers im Sommersemester 1931 an der Technischen Hochschule Berlin. Verfasser dankt Herrn Dipl.-Ing. Oscar Sint für wertvolle Mitarbeit bei der Ausarbeitung für den Druck.

[2]) H. Zimmermann, Die Berechnung des Eisenbahnoberbaues. 1. Auflage Berlin 1888, 2. berichtigte Auflage Berlin 1931.

Aus der bekannten Differentialgleichung des Balkens

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{b \cdot Q}{E \cdot J}$$

und aus der den Schwedlerschen Ansatz ausdrückenden Gleichung

$$Q = q - p = q - k \cdot y$$

folgt

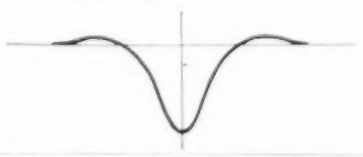
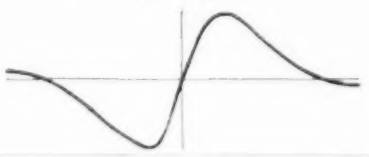
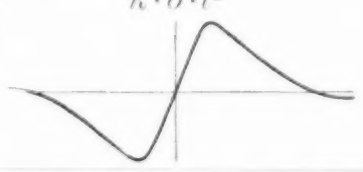
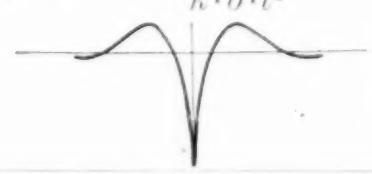
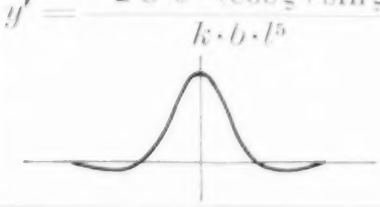
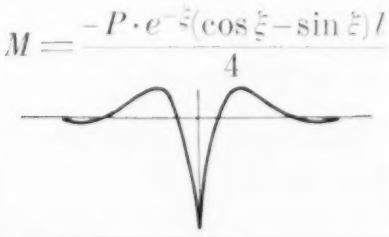
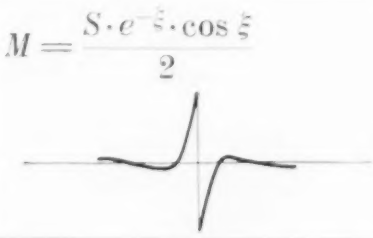
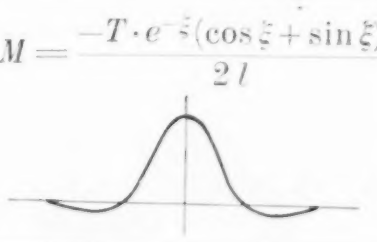
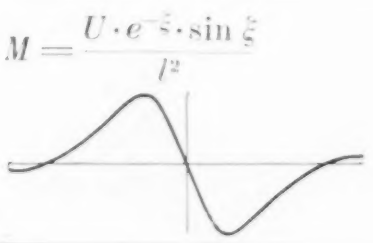
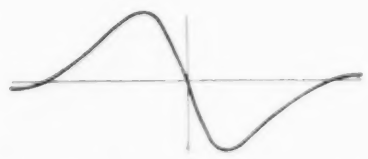
$$E \cdot J \cdot \frac{d^4 y}{dx^4} + b \cdot k \cdot y = b \cdot q\,,$$

wobei q die mit x veränderliche gegebene Auflast darstellt.

Man kann nun grundsätzlich zwei verschiedene Wege einschlagen. Entweder geht man direkt auf die Lösung der Gleichung los, wie dies von Hayashi[3]) in eleganter Weise gezeigt wurde, wobei es tatsächlich gelingt auf dem Umweg durch das Komplexe die Lösung auf die Auflösung eines Satzes von vier linearen Gleichungen und auf darauf folgende vier Quadraturen zurückzuführen (wobei die Anpassung an die Randbedingungen durch die Wahl der Konstanten der Quadraturen geschieht); oder aber man wählt einen synthetischen Weg, und dieser letztere, wohl viel fruchtbarere Weg soll uns im nachfolgenden beschäftigen.

Man wählt bei der synthetischen Lösung in der klassischen Gestalt, die von Zimmermann herrührt, als Ausgangspunkt den beiderseits ins Unendliche gehenden Balken mit einer konzentrierten Einzellast. In diesem Fall vereinfacht sich die obige Differentialgleichung,

Tabelle[3a]).

	Einzellast P	Einzelmoment S	Doppelmoment T	Doppelangriff U
Durchbiegung y	$y = \frac{P}{2k \cdot b \cdot l} e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)$ 	$y = \frac{-S \cdot e^{-\xi} \cdot \sin\xi}{k \cdot b \cdot l^2}$ 	$y = \frac{-T \cdot e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi)}{k \cdot b \cdot l^3}$	$y = \frac{2U \cdot e^{-\xi} \cdot \cos\xi}{k \cdot b \cdot l^4}$
Neigung y'	$y' = \frac{-P \cdot e^{-\xi} \sin\xi}{k \cdot b \cdot l^2}$ 	$y' = \frac{-S \cdot e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi)}{k \cdot b \cdot l^3}$ 	$y' = \frac{2T \cdot e^{-\xi} \cdot \cos\xi}{k \cdot b \cdot l^4}$	$y' = \frac{-2U \cdot e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)}{k \cdot b \cdot l^5}$ 
y''	$y'' = \frac{-P \cdot e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi)}{k \cdot b \cdot l^3}$	$y'' = \frac{2S \cdot e^{-\xi} \cdot \cos\xi}{k \cdot b \cdot l^4}$	$y'' = \frac{-2T \cdot e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)}{k \cdot b \cdot l^5}$	$y'' = \frac{4U \cdot e^{-\xi} \cdot \sin\xi}{k \cdot b \cdot l^6}$
Biegemoment M	$M = \frac{-P \cdot e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi)\, l}{4}$ 	$M = \frac{S \cdot e^{-\xi} \cdot \cos\xi}{2}$ 	$M = \frac{-T \cdot e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)}{2\,l}$ 	$M = \frac{U \cdot e^{-\xi} \cdot \sin\xi}{l^2}$ 
y'''	$y''' = \frac{2P \cdot e^{-\xi} \cdot \cos\xi}{k \cdot b \cdot l^4}$	$y''' = \frac{-2S \cdot e^{-\xi} \cdot (\cos\xi + \sin\xi)}{k \cdot b \cdot l^5}$	$y''' = \frac{4T \cdot e^{-\xi} \cdot \sin\xi}{k \cdot b \cdot l^6}$	$y''' = \frac{4U \cdot e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi)}{k \cdot b \cdot l^7}$
Querkraft Q	$Q = \frac{P \cdot e^{-\xi} \cdot \cos\xi}{2}$	$Q = \frac{-S \cdot e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)}{2\,l}$	$Q = \frac{T \cdot e^{-\xi} \cdot \sin\xi}{l^2}$ 	$Q = \frac{U \cdot e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi)}{l^3}$

[3]) Keiichi Hayashi, Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage und ihre Anwendung auf den Tiefbau. Seite 9 uff. Berlin 1921.

[3a]) Die in der Tabelle enthaltenen Figuren dienen nur zur Veranschaulichung des allgemeinen Verlaufs und der Symmetrieverhältnisse.

indem q Null wird und die Last, die vorhin in der Differentialgleichung vorkam, kann in der Randbedingung für die zwei Abschnitte des Balkens berücksichtigt werden. Die Grundlösung wird somit, wenn man die Abkürzung

$$\sqrt[4]{\frac{4E \cdot J}{b \cdot k}} = l; \quad \frac{x}{l} = \xi$$

einführt

$$y = \frac{P}{2k \cdot b \cdot l} e^{-\xi} (\cos \xi + \sin \xi)$$

für den einen Ast der Kurve und entsprechend symmetrisch für den anderen Ast. Daraus erhält man auch ohne weiteres die Tangentenneigung, Biegemoment, Querkraft und den Bettungsdruck als Funktionen des Ortes. Es ist außerordentlich interessant, wie Zimmermann von dieser Grundlösung, die für den unendlichen Balken gilt, durch eine Reihe von Kunstgriffen auf den endlichen Balken mit einer oder mehreren Einzellasten an beliebiger Stelle übergeht. Das Wesen seines Gedankens besteht darin, daß er an dem beiderseits unendlichem Balken außer den tatsächlich wirkenden Lasten fingierte Einflüsse, etwa Zwängungen (Distorsionen) anbringt, die den Spannungszustand des unendlichen Balkens in jenen des endlichen überführen. Da aber dieser Grundgedanke durch eine Fülle von Sonderüberlegungen und Kunstgriffen überdeckt ist, so wurde der originelle Zimmermannsche Gedanke, der der allgemeinen Theorie der Distorsionen zeitlich weit vorangeeilt ist, nicht genügend verstanden und demzufolge wurde dann dieser Gedanke beim weiteren Ausbau der Theorie übergangen.

Aus diesem Grund soll hier eine mit der Zimmermannschen Betrachtung methodisch eng verwandte Lösung des Problems angedeutet werden, die aber an Stelle der Zwängungen die vom Verfasser[4]) systematisch behandelten höheren Lastsingularitäten, und zwar Doppelmoment und Doppelangriff, an dem unendlichen Balken zur Erreichung der Übereinstimmung mit dem endlichen anbringt. Zu diesem Zweck sollen also zunächst die Wirkungen der höheren Lastsingularitäten auf den beiderseits unendlichen Balken in umstehender Tabelle als Funktionen des Ortes zusammengestellt werden.

Nunmehr sind wir in der Lage die Lösung für eine ganz beliebige, auch stetige Belastung synthetisch aufzubauen und würden dabei allgemein auf vier Gleichungen mit vier Unbekannten geführt (die Intensität des Doppelmomentes und des Doppelangriffs an den beiden Enden: T_A, T_B, U_A, U_B). Das Hertzka-Andréesche B-U-Verfahren erlaubt uns (Abb. 1) die Lösung noch weiter zu vereinfachen und sie auf zwei Systeme von je zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten zurückzuführen.

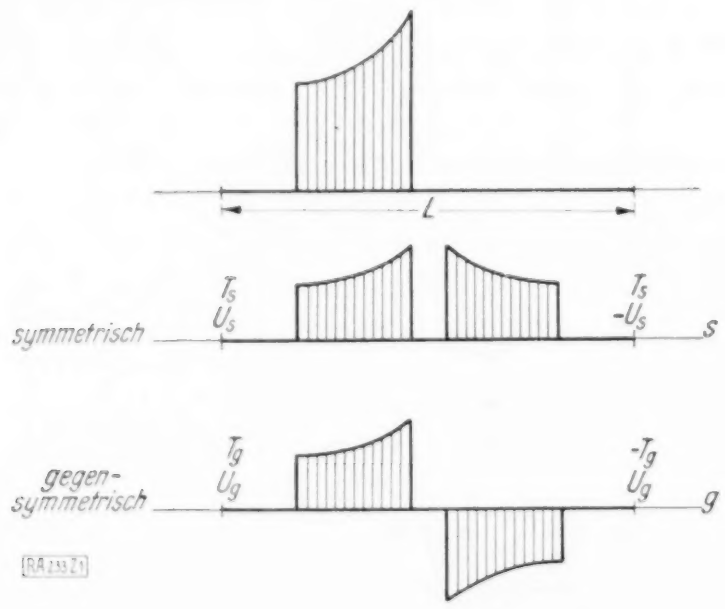


Abb. 1.
Zurückführung eines bel. belasteten endlichen Balkens auf den symm. und gegensymm. belasteten unendlich langen Balken.

Das T und das U der ersten Teillösung ergibt sich nunmehr (wenn mit M_{os} und Q_{os} bzw. M_{os} und $-Q_{os}$ die Biegemomente und die Querkräfte an dem unendlich langen Balken an den als Stabenden gewünschten Stellen infolge der symmetrischen Teillasten s der gegebenen Belastung bezeichnet werden) aus folgenden linearen Gleichungen:

$$M_{0\,s} = -\frac{T}{2l}(1 + \eta_\lambda) - \frac{U}{l^2} \cdot \eta_\lambda'$$

$$Q_{0\,s} = +\frac{T}{l^2}\eta_\lambda' + \frac{U}{l^3}(1 - \mu_\lambda).$$

[4]) P. Neményi, Eine neue Singularitäten-Methode für die Elastizitätstheorie. Diese Zeitschrift 1929, S. 488 u. ff. P. Neményi, Über die Singularitäten der Elastizitätstheorie. Diese Zeitschrift 1930, S. 383 u. ff.

Dabei muß auf Zimmermann hingewiesen werden, der folgende Funktionszeichen eingeführt hat:

$$\eta = \varepsilon^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)$$
$$\eta' = -\varepsilon^{-\xi}\sin\xi$$
$$\mu = e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi)$$
$$\mu' = -e^{-\xi}\cos\xi.$$

Diese vier Funktionen sind bei Zimmermann tabellarisch vorzufinden, so daß η_λ, η'_λ μ_λ aus der Tabelle an der Stelle $\xi = \lambda = \frac{L}{l}$ erhalten werden kann.

Ebenso erhält man für die gegensymmetrischen Teillasten:

$$M_{0g} = -\frac{T}{2l}(1-\eta_\lambda) + \frac{U}{l^2}\cdot\eta_\lambda'$$

$$Q_{0g} = -\frac{T}{l^2}\eta_\lambda' + \frac{U}{l^3}(1+\mu_\lambda).$$

Die gesamten Wirkungen auf den endlichen Balken ergeben sich dann durch Überlagerung der Wirkungen der tatsächlich gegebenen Belastung und der Singularitäten von der ermittelten Größe auf dem unendlichen Balken.

Eine in den praktischen Auswirkungen ebenbürtige, für den Anfänger sehr viel leichter faßliche, dafür aber logisch-mathematisch weniger elegante synthetische Lösung verdanken wir neuerdings Klischewitsch[5]). Klischewitsch hat gezeigt, daß in jedem Fall das Kräftespiel eines endlich langen Balkens aus jenem des unendlich langen erhalten werden kann, indem an den als Stabenden gewünschten Stellen je eine konzentrierte Einzellast und je ein konzentriertes Einzelmoment angebracht wird, und deren Größe aus der Bedingung bestimmt wird, daß das Biegemoment und die Querkraft an den betreffenden Stellen verschwinden sollen. Während aber bei der oben mitgeteilten Methode, — ebenso wie bei Zimmermann, — unendlich nahe links und rechts von den fingierten Singularitäten das Moment und die Querkraft zum Verschwinden kommt, also der Balken tatsächlich zerschitten wird, verhält es sich bei der Methode von Klischewitsch so, daß nur auf der Innenseite der gewünschten Schnittstelle die Querkraft und das Moment zu Null gemacht wird. Dies ändert aber naturgemäß nichts an der praktischen Anwendbarkeit des Verfahrens von Klischewitsch.

Eine Sonderstellung unter allen Wegen zur Beherrschung des endlich langen Balkens auf elastisch nachgiebiger Unterlage nimmt die Methode ein, die vorwiegend auf Pasternak[6]) zurückgeht, obschon eine Andeutung auch bei Hayashi[7]) zu finden ist. Diese Methode geht von der leicht nachweisbaren Tatsache aus, daß für einen unbelasteten Abschnitt eines elastisch gelagerten Balkens für das Biegemoment genau dieselbe Differentialgleichung gilt wie für die Durchbiegung, also:

$$\frac{1}{4l^4}\cdot M^{IV} = -M.$$

(Bemerkenswert ist, daß diese Differentialgleichung auch noch für ortsveränderliches J gilt, während die analoge Gleichung für die Durchbiegung nur für konstantes Trägheitsmoment Gültigkeit hat.)

Unter Benützung dieser Gleichung geht nun Pasternak nicht auf die Lösung des beiderseits unendlichen Balkens aus, sondern er betrachtet als Grundfall den endlich langen Balken mit einer Einzellast bzw. einem Einzelmoment an einem Ende, Belastungsfälle, die zugleich auch die Einflußlinie, Durchbiegung bzw. Neigung des Stabendes infolge Einwirkung einer wandernden Einzellast liefern. Von diesem Sonderfall ausgehend, gelingt es Pasternak

---

[5]) G. Klischewitsch, Die einfachste Methode der genauen Berechnung der endlich langen Balken auf elastischer Unterlage. In Vorbereitung, erscheint im Ingenieurarchiv; eine vorläufige kürzere Mitteilung soll im „Bauingenieur" veröffentlicht werden.

[6]) P. Pasternak, Baustatische Theorie biegefester Balken und Platten auf elastischer Bettung. Beton und Eisen 1926. S. 163 u. ff. — Eine weitere rechnerische und zeichnerische Auswertung der Ergebnisse ist von H. Fritz vorgenommen worden: H. Fritz, Einflußfläche des biegefesten Balkens auf elastischer Bettung. Beton und Eisen 1930. S. 442 u. ff.

[7]) Keiichi Hayashi, a. a. O. S. 16.

die allgemeine Lösung zu entwickeln. Seine Arbeit ist hauptsächlich bemerkenswert durch die Fülle der Einzelresultate; u. a. teilt er auch zwei Näherungstheorien mit: Die eine für den sehr langen (sehr schlanken), die andere für den sehr kurzen (sehr gedrungenen) Balken [7a]).

2. Verallgemeinerungen.

In der obigen Theorie wurde vorausgesetzt, daß nur den Durchbiegungen Widerstand entgegengesetzt wird, und zwar an jeder Stelle nach dem konstanten Verhältnis k, und daß den Richtungsänderungen an sich kein Widerstand begegnet. Schon Zimmermann hat indessen, in Hinblick auf gewisse besondere Fragen des Eisenbahnoberbaues, den Fall untersucht, daß außer der stetigen Unterstützung auch noch elastisch nachgiebige oder unnachgiebige Einzelunterstützungen vorhanden sind.

Bei der Fundierung von Hochbauten kommt ein anderer Typ von Widerstand zur Geltung, nämlich das aufgehende Rahmenwerk des Gebäudes setzt den Richtungsänderungen des elastisch gelagerten Balkens Widerstand entgegen; ein Grenz- bzw. Sonderfall hiervon sind feste Einspannungen des elastisch gelagerten Balkens. Die diesbezügliche Theorie rührt im wesentlichen von Craemer [8]) her, obwohl auch hierüber schon Hayashi einiges Wertvolle entwickelt hat. Es ist offenbar, daß auch diese Erweiterung ebensowenig auf prinzipielle Schwierigkeiten stoßen kann, wie die eben erwähnte Zimmermannsche Erweiterung der Theorie. Eine Schwierigkeit entsteht nur dann, wenn der Kastenrahmen auch seitlich ganz oder teilweise von der Erde begrenzt ist. Hayashi war der Meinung, daß auch für die von der Erde seitlich gedrückten Rahmenstiele (Wände) der Schwedlersche Ansatz angewendet werden darf. Craemer hat auf die Unzulässigkeit dieser Annahme hingewiesen und schlägt vor, die äußeren Erdkräfte für diese Stiele aus der Theorie des aktiven Erddrucks zu entnehmen. Dieser Vorschlag dürfte für die Praxis den notwendigen Anhalt liefern, wenn es auch für den Theoretiker dabei befremdend wirken kann, daß für ein und dasselbe Tragwerk an der Sohle ein ganz anderes Stadium der Bodenformänderung zugrunde gelegt wird wie für die Seitenwände.

Die elastische Nachgiebigkeit gegen lotrechte Verschiebungen kann infolge natürlicher Verhältnisse oder infolge besonders gewählter Verdichtungen des Bodens (z. B. Pfähle) auch ortsveränderlich sein. Ein Sonderfall hiervon (linear veränderliches k) ist bei Hayashi ausführlich behandelt. Als einen Sonderfall dieser Ortsveränderlichkeit von k können wir schließlich auch den von Freund [9]) in Hinblick auf Schleusengründungen untersuchten Fall ansehen, welcher dann eintritt, wenn in einzelnen Abschnitten der Untergrund nachgiebt oder wegsackt, etwa infolge von Veränderungen im Grundwasserstand. Das bedeutet also, daß k in einzelnen Abschnitten Null wird. Auf die Bedeutung der richtigen Wahl dieser Abschnitte kommen wir unter V noch kurz zurück. Hier sei nur auf die mathematische Theorie hingewiesen, die allerdings mit recht schwerfälligen Methoden von Freund ausführlich dargelegt wurde.

Eine neue Art von Schwierigkeit kommt in das Problem, wenn die Abschnitte, wo der Balken freiliegt, nicht von vornherein, etwa durch die Grundwasserverhältnisse oder durch die im Entwurf festgelegte Tragwerkanordnung gegeben sind, sondern wenn der Balken sich infolge der Belastung selbst abschnittweise von der Unterlage elastisch abhebt. Die Abhebungsstelle ist durch die Bedingung $q = 0$ gekennzeichnet. Das Problem führt auf eine gemischte Randwertaufgabe, deren Lösung direkt und geschlossen bis jetzt wohl noch für keinen einzigen Fall geglückt ist. Dagegen ist von Hayashi [10]) ein Probierverfahren in aller Ausführlichkeit ausgearbeitet. Natürlich ist eine Lösung, bei welcher sich die Enden des Tragwerkes von der Unterlage abheben, in jedem Fall konstruktiv zu verwerfen. Dagegen kann sich sehr wohl ein zweckmäßig konstruierter Grundbalken auf einem inneren Abschnitt abheben, so daß der Theorie eine gewisse praktische Bedeutung zukommt.

Bei allen bisherigen Problemen ist die von dem Boden übertragene Bettungskraft durchwegs normal und quer zur Balkenrichtung gleichmäßig verteilt. Hayashi hat aber auch, wenigstens in allgemeinen Zügen, die Wege angedeutet, wie die an der Sohle übertragenen Reibungskräfte und die daraus entspringenden Axialkräfte in die Theorie einbezogen werden könnten. Viel wichtiger erscheint die von Pasternak [11]) herrührende Verallgemeinerung

[7a]) Zum Schluß sei noch eine durch ihre Schlußfolgerung interessante Untersuchung des endlichen Balkens unter einer wandernden Einzellast erwähnt: F. Schleicher und K. Sanden: Zur Theorie des Balkens auf elastischer Unterlage. Beton und Eisen 1926. S. 83 u. ff.

[8]) H. Craemer, Zur praktischen Statik der Kranbahnfundamente. Der Bauingenieur 1925. S. 527 u. ff. H. Craemer, Zur Berechnung geschlossener Kastenrahmen auf elastischem Baugrund. Der Bauingenieur 1925. S. 527 u. ff.

[9]) Freund: Erweiterte Theorie für die Berechnung von Schleusenböden und ähnlichen Gründungskörpern. Zeitschrift für Bauwesen 1927. S. 73 u. ff. und S. 108 u. ff.

[10]) Keiichi Hayashi, a. a. O. S. 152 u. ff.

[11]) P. Pasternak, 1. Baustatische Theorie usw. Beton und Eisen 1926. S. 163 u. ff.; 2. Mitteilung Beton und Eisen 1926. S. 179.

der Theorie, die die Möglichkeit bietet, auch eingeprägte Drehmomente, deren Achse mit der Balkenachse zusammenfällt, zu berücksichtigen; die quer zur x-Richtung nunmehr ungleichmäßige Bodenpressung wird dabei nach Pasternak näherungsweise eindimensional erfaßt, so daß der Ansatz $p = k \cdot y$ durch den Ansatz $m = k_1 \cdot \gamma$ ergänzt wird. Darin ist m das Moment der auf einen Querstreifen von 1 m Breite wirkenden Bodenpressungsverteilung nach Abzug des zugehörigen gleichmäßigen Durchschnittswertes p und γ der Torsionswinkel des Querschnitts. Diese Theorie von Pasternak ist besonders wichtig für durchlaufende, balkenartige Reihenfundamente von Hallenbindern.

Zum Schluß sei die von Hayashi[12]) stammende bzw. weitergeführte Theorie der gekrümmten Grundtragwerke (Grundbögen), sowie der außer den lotrechten Lasten auch axialen Kräften ausgesetzten jedoch anfänglich geraden Grundtragwerke erwähnt. Die Theorie der axialen Knickung des elastisch gelagerten Stabes ist aber erst von Chwalla[13]) entwickelt und mit sehr bemerkenswerten Ergebnissen durchgeführt worden.

III. Das axial-symmetrische Problem.

(Kreis- und Kreisringplatte mit axial-symmetrischer Belastung und Lagerung.)

Die Theorie ist ganz vorwiegend von Schleicher[14]) entwickelt worden. Es soll hier nur an einige Grundzüge der Theorie erinnert werden.

Die Plattengleichung lautet in Polarkoordinaten:

$$\frac{d^4 w}{d r^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 w}{d r^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2 w}{d r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d w}{d r} = \frac{q - p}{D},$$

wobei

$$D = \frac{m^2}{m^2 - 1} \cdot \frac{E \cdot h^3}{12}.$$

Mit Benützung des Differentialsymbols

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{d r}$$

schreibt sich diese Gleichung kurz wie folgt:

$$\nabla_r^4 w = \frac{q - p}{D}.$$

Ferner ist nach Schwedler

$$p = k \cdot w,$$

daher

$$\nabla_r^4 w + \frac{k \cdot w}{D} = \frac{q}{D}.$$

Ist die über ein ganzes Plattenstück als konstant vorausgesetzte Belastung q von Null verschieden, so kann man diese lineare Differentialgleichung durch die Substitution

$$\overline{w} = w - \frac{q}{k}$$

homogen machen, so daß sie lautet:

$$\nabla_r^4 \overline{w} + \frac{k}{D}\overline{w} = 0,$$

die dann durch die Substitution

$$r = \sqrt[4]{\frac{D}{k}} \cdot \xi$$

in die einfachere Gleichung

$$\nabla_\xi^4 \overline{w} + \overline{w} = 0$$

übergeht.

[12]) Keiichi Hayashi, a. a. O. S. 35 u. ff.
[13]) E. Chwalla, Die Stabilität eines elastisch gebetteten Druckstabes. Diese Zeitschrift 1927. S. 276 u. ff.
[14]) F. Schleicher, Über Kreisplatten auf elastischer Unterlage. Berlin 1925.

Zur generellen Lösung dieser linearen Differentialgleichung vierter Ordnung kommt man am einfachsten durch eine weitere lineare Substitution:

$$\xi = \sqrt[4]{-1} \cdot \zeta = \pm \sqrt{\pm i} \cdot \zeta = \pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \zeta ,$$

die die Gleichung in

$$\nabla^4 \overline{w} - \overline{w} = 0$$

überführt. Das allgemeine Integral dieser letzteren Gleichung ist aber wohl bekannt:

$$\overline{w} = a_1 \cdot J_0(\zeta) + a_2 \cdot J_0(i \cdot \zeta) + a_3 \cdot H_0(\zeta) + a_4 \cdot H_0(i\,\zeta),$$

wo J_0 eine Zylinderfunktion 0-ter Ordnung und H_0 eine Hankelsche Funktion 0-ter Ordnung bedeutet.

Für jeden Ring konstanten Querschnitts und konstanter Belastung q haben die vier Beiwerte bestimmte Werte, die an die eigentlichen Randbedingungen bzw. an die Übergangsbedingungen zu den Nachbarringen angepaßt werden müssen. Von den verschiedenen Randbedingungen sollen hier nur besonders hervorgehoben werden: die Randbedingungen für die elastisch senkbare und drehbare Einspannung, da diese auch als Übergangsbedingungen zum Nachbarring benützt werden können. Sie lauten für eine Einspannung an der Stelle $\xi = a$ offenbar

$$w = w_a \left(\frac{d\,w}{d\,r}\right)_a = \delta_a ,$$

wobei w_a und δ_a aus den Eigenschaften des elastischen Einspannmediums, bzw. des Nachbarringes folgen.

Die Fülle der mit diesem Apparat von Schleicher ausgearbeiteten Einzellösungen ist sehr groß. Außer Kreisplatten können nämlich ebensogut auch Kreisringplatten behandelt werden und die Berücksichtigung abschnittsweise veränderlicher Plattenstärke bietet ebenfalls keinerlei Schwierigkeit. Dagegen wäre auch hier, ebenso wie bei den Balken, recht schwierig die direkte Erfassung einer etwaigen Abhebung infolge der Belastung und diese Art von Aufgabe ist von Schleicher auch gar nicht gelöst worden.

Es sei bemerkt, daß durchaus die Möglichkeit besteht, ähnlich wie es oben für den Balken entwickelt wurde, auch die Theorie der Kreisplatten synthetisch aufzubauen, wobei als elementare Ausgangslösung die allseitig unendliche Kreisplatte mit gleichmäßiger Belastung auf einer Kreisfläche, bzw. der daraus leicht ableitbare Fall einer kreisförmigen Schneidenbelastung, dienen müßte, wodurch nicht nur alle Aufgaben für Kreisplatten, sondern auch jene für Kreisringplatten abgeleitet werden können[15]). Es scheint aber, daß dieser Weg bis jetzt noch nicht beschritten wurde.

Die Untersuchungen von Schleicher sind vornehmlich den Aufgaben des Behälterbaues angepaßt. Für das einzelne Fundament von schwer belasteten Säulen eignen sich natürlich Platten konstanten Querschnittes im allgemeinen nicht gut. Die Theorie der Kreisplatten mit veränderlicher Stärke ist neuerdings wesentlich von H. Craemer[16]) und O. Pichler[17]) gefördert worden. Während Pichler hauptsächlich die mathematische Theorie der Platten von veränderlicher Stärke gefördert hat, ist Craemers Verdienst vor allem die Berücksichtigung vieler Einzelfaktoren, die bei der Berechnung in Betracht gezogen werden können. Besonders bemerkenswert ist Craemers Hinweis auf die erhebliche Bedeutung der Platteneinspannung am Säulenschaft. — Die Rolle der endlichen Bettungszahl k tritt bei allen diesen Untersuchungen zurück, da ja die Plattensteifigkeit sehr erheblich ist. Eine theoretische Berücksichtigung der Abweichung der wirklichen dicken Platte von den Schlußfolgerungen aus der Kirchhoffschen Theorie dünner Platten ist von keinem der beiden Autoren durchgeführt worden. Das wirkliche Verhalten solcher massigen Einzelfundamente ist, allerdings nicht für das elastische Stadium sondern hauptsächlich für das Bruchstadium, von Gehler[18]) auf dem Versuchswege und unter Heranziehung festigkeitsphysikalischer Überlegungen angestrebt, jedoch noch nicht völlig gelöst worden, worauf hier nur kurz verwiesen werden kann.

[15]) Vgl. hierzu: Neményi, Die Kreisplatte mit zentrischem Loch. Diese Zeitschrift 1930. S. 197 u. ff.

[16]) H. Craemer, Kritik der Berechnung von Kreisfundamenten. Beton und Eisen 1925. H. Craemer, Das Problem der kreisplattenartigen Stützenfundamente. Beton und Eisen 1926. H. Craemer, Der Einfluß nach den Rändern abnehmender Stärke von Kreisplattenfundamenten. Beton und Eisen 1928.

[17]) Otto Pichler, Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke. Springer 1928. Behandelt nicht die elastische Bettung.

[18]) Gehler, Jahresberichte des Deutschen Betonvereins 1925. Gehler, Der Bauingenieur 1926.

IV. Plattenprobleme in zwei Veränderlichen.

1. Die allseitig unendliche Pilzplatte als Fundament. (S. Abb. 2.)

Die Aufgabestellung und deren Lösung rührt von V. Lewe[19]) her. Lewe hat bekanntlich, in Fortsetzung Navierscher und Mesnagerscher Gedankengänge, in der Plattentheorie der Methode Geltung verschafft, wonach nicht einzelne Gebiete untersucht und durch die Kontinuitätsbedingung aneinander gefügt werden (so wie es beispielsweise Schleicher in der Kreisplattentheorie gemacht hat), sondern daß die ganze Belastungsverteilung einheitlich nach Orthogonalfunktionen entwickelt wird, eine Methode, die für gewisse praktische Lastfälle ganz besonders große Vorzüge hat.

Diese Methode wendet er auch auf die elastisch gebettete Platte an, also er entwickelt in der Gleichung

$$\nabla^4 w = p(x, y) - k \cdot w$$

das $p(x, y)$ nach Fourierschen Doppelreihen und erhält dann leicht in derselben Form die gesuchte Durchbiegungsfunktion w.

$$D \cdot w = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2\,p\,\beta \sin m\pi a}{m\pi\left[\pi^4\left(\frac{m}{a}\right)^4 + \frac{k}{D}\right]} \cdot \cos\frac{m\pi x}{a}$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2\,p\,a \sin n\pi\beta}{n\pi\left[\pi^4\left(\frac{n}{b}\right)^4 + \frac{k}{D}\right]} \cdot \cos\frac{n\pi y}{b}$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{4\,p \sin m\pi a \cdot \sin n\pi\beta}{mn\pi^2\left\{\pi^4\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2 + \frac{k}{D}\right\}} \cdot \cos\frac{m\pi x}{a} \cdot \cos\frac{n\pi y}{b}.$$

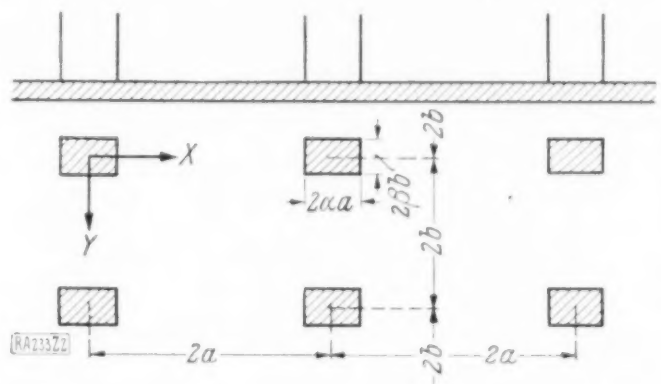


Abb. 2. Das Lewesche Pilzplattenproblem.

2. Plattenstreifen unter Einwirkung von Reihen konzentrierter Einzellasten und von Temperatureinflüssen.

Die Theorie rührt von Westergaard[20]) her, der sich an die bekannte Methode von Maurice Lévy anlehnt.

3. Der Pilzplattenstreifen als Fundament.

Das Problem, das sowohl das Lewesche als auch das Westergaardsche als Sonderfall in sich schließt, ist vom Verfasser[21]) 1928 gelöst worden. Die Lösung hat sich damals auf den symmetrischen Fall beschränkt und es wurde der Fall einer geraden und einer ungeraden Anzahl Säulenreihen auseinandergehalten. Hier soll eine einzige, beliebige, unsymmetrisch gelegene Säulenreihe behandelt werden, aus der als Element alle übrigen Fälle, die in Frage kommen, ohne weiteres aufgebaut werden können.

Wie aus nachstehender Übersicht (Abb. 3) hervorgeht, läßt sich nun die Belastung durch die einzelne Säulenreihe in vier Teillösungen zerlegen, deren jede besonders einfach ist, indem die Belastungsvierecke bei s_1 und s_2 symmetrisch in bezug auf die Streifenmitte bei g_1, g_2 symmetrisch in bezug auf die Streifenränder liegen. Es genügt somit, diese beiden Typen von Lastfällen zu betrachten.

a) Lastfalltyp „s“ (s_1 bzw. s_2).

Die Lewesche Lösung für die allseitig unendlichen Platten befriedigt alle Bedingungen unseres Plattenstreifens; nur die Streifenränder müssen freigelegt werden. Durch die besonderen Symmetrieverhältnisse ist indessen an den als Streifenränder geforderten Stellen die Quer-

[19]) V. Lewe, Pilzdecken und andere trägerlose Eisenbetonplatten. Berlin 1926. V. Lewe, Platten rechteckiger Grundrißteilung auf elastischer Unterlage. Der Bauingenieur 1923. S. 453 u. ff.

[20]) Westergaard, Om Beregning af Plader paa elastisk Underlag med saerlig Henblik paa Spørgsmaalet om Spaendinger i Betonveje. Ingenioren 1923. Heft 42.

[21]) P. Neményi, Theorie durchlaufender trägerloser Fundamentstreifen auf elastischer Bettung. Beton und Eisen 1928. S. 448 u. ff.

kraft ohnehin durchwegs gleich Null. Wir müssen somit der Lewe-Lösung nur eine solche Lösung überlagern, die überall die homogenisierte Differentialgleichung, also

$$\nabla^4 w = -k \cdot w$$

befriedigt, und an den als Ränder verlangten Stellen die Querkraft Null und solche Biegemomente ergibt, die den Leweschen Momenten an derselben Stelle stets entgegengesetzt gleich sind. Diese Zusatzlösung, die von Maurice Lévyschem bzw. Westergaardschem Typ ist, wird wie folgt angesetzt:

$$w_w = \frac{1}{D} \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \cdot \cos \frac{m \pi x}{a} \cdot \cos \gamma_m \cdot y \cdot \mathfrak{Cof}\, \beta_m \cdot y \,.$$

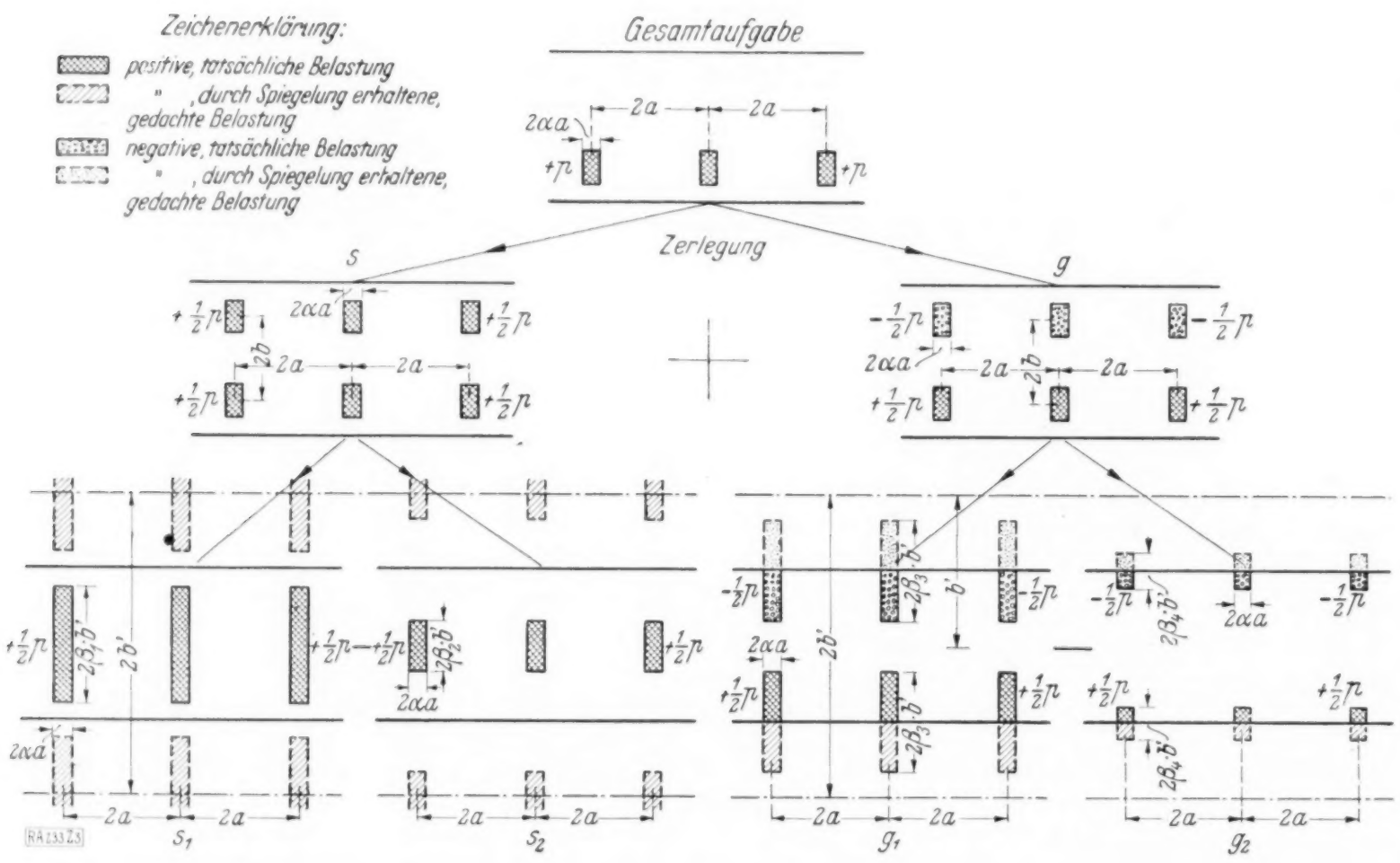


Abb. 3. Unsymmetrisch belasteter Fundamentstreifen, zurückgeführt auf die Lewesche allseitig unendliche Pilzplatte.

Hierbei muß, damit jedes Glied für sich die homogene Differentialgleichung befriedigt,

$$\gamma_m = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \frac{k}{D}} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{2}}$$

$$\beta_m = \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + \frac{k}{D}} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{2}}$$

sein und die Anspassung an die Randbedingung erfolgt durch die Wahl der Koeffizienten A_m, die nach Bildung des Momentenausdruckes

$$M_{\perp b} = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{+b}$$

errechnet werden können, und zwar zu

$$A_m = \frac{-c_m}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cdot \cos \gamma_m \cdot b \cdot \mathfrak{Cof}\, \beta_m \cdot b - \sqrt{\frac{k}{D}} \cdot \sin \gamma_m b \cdot \mathfrak{Sin}\, \beta_m b} \,.$$

Hierbei bedeutet c_m eine Abkürzung für den bei Bildung des Momentenausdruckes entstehenden, zum Teil aus Summen berechneten, konstanten Wert.

b) Lastfalltyp „g“ (g_1 bzw. g_2).

Hier dient als Ausgangspunkt nicht die eigentliche Lewesche Lösung, sondern die aus zwei entgegengesetzt gleichen, gegeneinander um $b' = 2\,b$ verschobenen Lewe-Lösungen erhaltene Lösung, die wie folgt lautet:

$$w = \frac{1}{D}\left\{\sum_{n=1,3,5}^{n=\infty} \frac{4\,p'\,a \sin n\pi\beta}{n\pi\left[\pi^4\left(\frac{n}{b'}\right)^4 + \frac{k}{D}\right]} \cdot \cos\frac{n\pi y}{b'}\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1,3,5}^{n=\infty}\sum_{m=1,2,3}^{m=\infty} \frac{8\,p' \cdot \sin m\pi a \cdot \sin n\pi\beta}{m\,n\,\pi^2\left\{\pi^4\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b'}\right)^2\right]^2 + \frac{k}{D}\right\}} \cdot \cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b'}\right\} \quad \begin{matrix} n = \text{ungerade Zahlen} \\ m = \text{alle Zahlen} \end{matrix}$$

(für p ist der Belastungswert pro Flächeneinheit einzusetzen, also im vorliegenden Falle $g\,p' = \frac{p'}{2}$).

Diese Lösung ergibt nun wieder aus Symmetriegründen in den als Streifenränder geforderten Linien die Querkraft gleich Null und somit genügt auch hier die Zufügung einer solchen Westergaardschen Lösung, die die Differentialgleichung durch jedes Glied befriedigt, und die die Biegemomente an diesen Rändern zunichte macht. Diese Lösung lautet entsprechend:

$$w_w = \frac{1}{D}\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m' \cdot \cos\frac{m\pi x}{a} \cdot \sin\gamma_m y \cdot \mathfrak{Cof}\,\beta_m y\,.$$

Die Ermittlung der A_m erfolgt prinzipiell genau so wie bei der symmetrischen Lösungstype.

4. Endliche Rechteckplatten; elliptische Platten.

Verfasser[22]) hat andeutungsweise einen Weg angegeben, auf welchem, ausgehend von dem Plattenstreifen, auch die allseitig begrenzte Rechteckplatte mit rechteckiger Auflast durch Iteration schnell approximiert werden könnte. — Ein grundsätzlich anderer Weg für die Rechteckplatte mit konzentrierter Einzellast ist von Hans Happel[23]) beschritten worden. Er bedient sich des Ritzschen Verfahrens und ermittelt die Koeffizienten einer aus Tangens hyperbolicus-Funktionen aufgebauten Reihenentwicklung aus einem unendlichen Gleichungssystem.

Hans Happel hat in der älteren seiner erwähnten Arbeiten auch die elliptische Platte unter einer Einzellast untersucht.

V. Physikalisches und Technisches zum Schwedlerschen Ansatz; Ausblick auf andere Ansätze zur Berechnung auf dem Boden gelagerter Tragkörper.

1. Wahl der in Rechnung zu setzenden k-Werte und etwaiger Unterhöhlungsbreiten.

Die Schwedlersche Theorie hat sich in der Praxis weitgehend eingebürgert. Da, wie wir noch näher auszuführen haben werden, die ganze Berechnungsgrundlage $p = k \cdot y$ bei natürlichem Baugrund niemals vorhandene Eigenschaften impliziert, so ist es eigentlich abwegig, von der experimentellen Bestimmung der Bettungszahl k zu sprechen. Man müßte vielmehr sagen, daß man auf dem Versuchswege Anhaltspunkte für eine solche Wahl der Zahl k erlangen will, die eine genügende Übereinstimmung der Schlußfolgerungen aus der willkürlichen Schwedlerschen Theorie mit den wirklichen Verhältnissen ermöglicht. Wenn man mit verschieden großen, starren Stempeln Versuche anstellt, so zeigt es sich, daß der scheinbare k-Wert außerordentlich stark von dem Stempeldurchmesser abhängig ist, und sich bei wachsendem Stempeldurchmesser einem Mindestwert asymptotisch zu nähern scheint. Es wurde nun vielfach vorgeschlagen, diesen asymptotischen Wert als maßgebend in die Berechnung einzuführen, zumal bei großen Fundamentkörpern. Nun ändert sich aber k außerdem sehr stark selbst bei vollständig gleichmäßiger, mächtiger Oberschicht, je nachdem in welcher Tiefe die Druckfläche des Stempels angebracht wird. Es wäre vollständig verkehrt, die

[22]) P. Neményi, a. a. O., in Beton und Eisen.

[23]) Hans Happel, Nachrichten der Gesellsch. d. Wissenschaften zu Göttingen. Mathem.-physikal. Kl. 1914. S. 37 bis 62. Hans Happel, Mathematische Zeitschrift, herausgegeben von Lichtenstein. Bd. 6, 1920. S. 203 bis 218. Hans Happel, Der Eisenbau. 1921. S. 107.

außerordentlich hohen Werte, die sich für k bei dem Versuch in einem engen Schacht, etwa von der Tiefe, die der Lage der zu untersuchenden Grundplatte entspricht, der Berechnung zugrunde legen zu wollen[24]). Vielmehr wird man gewisse Ähnlichkeitsbetrachtungen, so ungeklärt diese Angelegenheit auch vorläufig liegt, bei der Annahme der Schichttiefe nicht umgehen können.

Die große Schwierigkeit in der Wahl von k auf Grund von Versuchen führt manchen Praktiker zu einem Ausweg[25]), der unbedingt empfohlen werden kann. Er wählt, sei es auf Grund von Stempelversuchen, sei es auf bloßen Augenschein hin, zwei recht extrem erscheinende k-Werte (beispielsweise bei mittlerem Boden $k=2$ und $k=20$), führt die ganze Berechnung für beide Werte durch und bemißt jeglichen Querschnitt nach dem ungünstigeren der sich ergebenden Werte. (Es ist nämlich nicht immer feststehend, daß der größere k-Wert für jeden Querschnitt günstigere Werte liefert.)

In derselben Richtung wie der letztere Vorschlag läuft auch der Freundsche Vorschlag, für den Fall einer Unterhöhlungsgefahr ergänzende Annahmen zu treffen, und zwar derart, daß alle extremen Senkungsmöglichkeiten untersucht werden. Beispielsweise bei unsymmetrischer Unterhöhlung eines symmetrischen Schleusenfundamentes nimmt Freund als extremen Fall an, daß die Stützung nur auf der halben Breite erfolgt, denn bei noch größerer Unterhöhlung müßte aus Gleichgewichtsgründen eine kleine Schrägstellung des ganzen Fundamentkörpers erfolgen[26]). — Ist die Unterhöhlungsgefahr geringer, so genügt es nach dem Vorschlag von Freund, die Annahme so zu treffen, daß die größte vorkommende Kantenpressung der Tragfähigkeit des Bodens entspricht; wenn nämlich die ungleichmäßigen Setzungen, die man befürchten muß, nur äußerst klein sind, so ist offenbar, daß die örtliche Überschreitung der Tragfähigkeit sofort eine günstigere Lage hervorrufen würde.

2. Physikalischer Sinn des Schwedlerschen Ansatzes und Kritik desselben.

Die Schwedlersche Hypothese stellt die Annahme dar, daß eine Last nur an ihrer eigenen Stelle eine Durchsenkung ihrer Unterlage hervorruft. Schon die unmittelbare Anschauung lehrt, daß eine solche Unterlage niemals vorkommt. Eine besonders gute Annäherung an diesen Fall haben wir in der Technik, wenn eine Fundamentplatte auf einer außerordentlich massiven, praktisch als starr zu betrachtenden Unterlage mit Vermittlung einer dünnen elastischen Zwischenlage (Schallisolierplatte) aufruht[27]), und die Anschauung lehrt, daß im Grenzfall unendlich dünner, dafür aber aus unendlich nachgiebigem Material bestehender Zwischenlage tatsächlich die Verhältnisse der Schwedlerschen Theorie genau entsprechen würden.

Ganz anders bei den verschiedenen Bodenarten. Hier verursacht unbedingt jede Last auch außerhalb ihrer Wirkungsstelle Bodendurchsenkungen.

Die mangelhafte Übereinstimmung mit der Wirklichkeit kommt auch in der Bodenpressungsverteilung unter einem starren Stempel gut zum Ausdruck. Diese Verteilung müßte nach der Schwedlerschen Theorie gleichmäßig ausfallen, in Wirklichkeit ist sie bei Sand glockenförmig, bei Felsboden weist sie ihren höchsten Wert unweit vom Rande auf; bei Tonboden liegen die Verhältnisse verschieden je nach dem Wassergehalt, sind besonders verwickelt und zum Teil ungeklärt. Es ist hier nicht der Ort, auf diese wichtigen Fragen im einzelnen einzugehen, es sei auf das einschlägige Schrifttum, insbesondere auf die Arbeiten von Terzaghi, Kögler-Scheidig, ganz besonders aber auf die neueste Arbeit von Scheidig[28]), in der eine übersichtliche vergleichende Studie dieser Verhältnisse durchgeführt ist, hingewiesen.

Zu den wichtigen Unstimmigkeiten, die aus Schwedlers Ansatz entstehen, muß auch die schon oben hervorgehobene starke Veränderlichkeit von k mit dem Stempeldurchmesser gerechnet werden. Wieghardt[29]) hebt als Unstimmigkeit besonders die Diskontinuität in der Einsenkung der Bodenoberfläche hervor („Riß").

3. Der Integralgleichungsansatz.

Die mannigfachen Unstimmigkeiten führten Wieghardt zu dem Vorschlag, bei Beibehaltung des Überlagerungsgesetzes für die Oberfläche des Untergrundes einen anderen, den

[24]) Z. B. Freund, a. a. O.

[25]) Mündliche Mitteilung von St. Szegö.

[26]) Es sei ausdrücklich daran erinnert, daß keine solche Sackungen berücksichtigt werden sollen, die bei wirklich schlechtem Untergrunde vorkommen können, sondern nur geringe Sackungen, wie sie auch bei gutem Sandboden auf Einwirkung besonderer Grundwasserverhältnisse zu befürchten sind.

[27]) P. Nemény i, Beton und Eisen 1928. S. 448 u. ff.

[28]) Scheidig, Die Berechnungsgrundlagen durchgehender Fundamente und die neue Baugrundforschung. Die Bautechnik 1931. S. 275 u. ff. Die Arbeit enthält auch viele wertvolle Literaturangaben.

[29]) Wieghardt, Über den Balken auf elastischer Unterlage. Diese Zeitschrift 1922. S. 165.

physikalischen Verhältnissen besser anpaßbaren Ansatz zu suchen. Als solcher bietet sich ganz von selbst folgender Ansatz dar:

$$w = c_1 \int_{-a}^{+a} p(\xi)\, k(|x-\xi|)\, d\xi$$

$$\frac{d^4 w}{d x^4} = c_2 \Big(q(x) - p(x) \Big),$$

wobei der Einfachheit halber nur der eindimensionale Fall berücksichtigt ist; darin drückt die erste Gleichung die Gültigkeit des Überlagerungsgesetzes für die Oberflächendurchsenkung des Bodens aus; $k(|x-\xi|)$ ist die Durchbiegung der Unterlagenoberfläche für eine konzentrierte Einzellast „1". Die zweite Gleichung ist die übliche Differentialgleichung der Balkenbiegung. — Die Verkopplung dieser beiden Gleichungen führt zu einer Integro-Differentialgleichung, die für starren Balken in eine einfache lineare Integralgleichung der ersten Art übergeht.

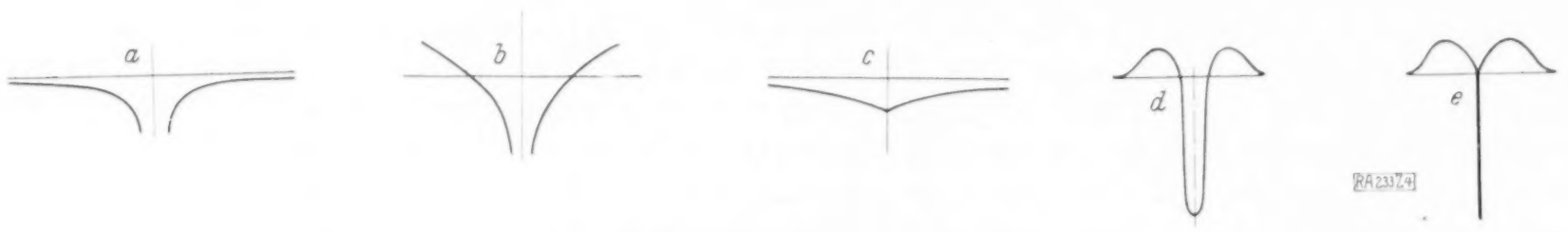


Abb. 4. Typen von Kernfunktionen.

Ist die Unterlage der elastische Halbraum, so ist die Kernfunktion $K(r) = \frac{1}{r}$ für die Platte (Abb. 4a); ist die zu untersuchende auf den elastischen Halbraum gelagerte Konstruktion ein schmaler Balken von der Breite ε, so kann, wie Wieghardt erwähnt hat, näherungsweise die eindimensionale Betrachtung benutzt und dabei der Kern

$$\ln \frac{2\varepsilon}{\sqrt{(x-\xi)^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}$$

angenommen werden (für den unendlich breiten Balken mit quer zur Biegungsrichtung gleichmäßiger Belastung auf ideal elastischer Unterlage muß natürlich das zweidimensionale Gegenstück des Kernes $\frac{1}{r}$ also $l(x-\xi)$ als Kernfunktion gewählt werden.[b]). Für den elastischen Halbraum als Unterlage gelang es W. Prager[30]), einige einfache Balkenaufgaben zu lösen, wobei er allerdings nicht direkt mit der Integro-Differentialgleichung gearbeitet hat, sondern einen Umweg durch das Komplexe einschlug. Es ist zu bemerken, daß bei Sand und Ton die Ergebnisse einer solchen Untersuchung mit der Wirklichkeit in viel schrofferem Gegensatz stehen müssen als die Resultate aus der einfachen Schwedlerschen Theorie, da ja beim elastischen Halbraum am Rande des starren Fundaments unendlich große Pressungen auftreten. Wieghardt hat statt den der reinen Elastizitätstheorie entsprechenden erwähnten Annahmen über $k(|x-\xi|)$ eine besondere Annahme aus mathematischen Gründen eingeführt, und zwar setzt er:

$$k(|x-\xi|) = e^{-(|x-\xi|)} \text{ (Abb. 4c).}$$

Auch dieser Ansatz, den Wieghardt mit großem mathematischen Geschick bis in die letzten Schlußfolgerungen durchgeführt hat, führt zu Ergebnissen, für die im wesentlichen dasselbe gilt, was für den Ansatz des elastischen Halbraums gesagt wurde, sogar vielleicht noch in höherem Maße[31]).

In beiden erwähnten Annahmen für $k(|x-\xi|)$ ist das Abklingen der Funktion k viel zu langsam. Ich bin durch sorgfältiges Studium der Integralgleichung zu der Überzeugung gekommen, daß, wenn der generelle Integralgleichungs-Ansatz überhaupt zu einer physikalisch für Sand- oder Tonboden einigermaßen zutreffenden Lösung führen soll, der Kern unbedingt eine der in Abb. 4d oder e skizzierten Formen oder eine ähnliche Gestalt haben muß.

[30]) W. Prager, Zur Theorie elastisch gelagerter Konstruktionen. Diese Zeitschrift 1927. S. 354 u. ff. Auch Schleicher hat in einzelnen Aufsätzen im Anschluß an Boussinesq die Übernahme des Kerns aus der mathematischen Elastizitätstheorie befürwortet.

[31]) Die Auffassung Wieghardts, daß die Unstimmigkeiten, die aus seinem Ansatz resultieren, auf Mängel der Balkenbiegungs-Differentialgleichung zurückzuführen sind, ist nicht stichhaltig. Die Unstimmigkeiten rührten zweifellos wesentlich von der Wahl des Kerns her.

Auch der Schwedlersche Ansatz fügt sich natürlich in den allgemeinen Integro-Differentialgleichungsansatz ein. Er entspricht einem Kern, der bloß aus einem unendlich schmalen, unendlich hohen Rechteck besteht, also verwandt mit e ist.

Es muß dahingestellt bleiben, ob es überhaupt eine solche Wahl der Kernfunktion gibt, bei welcher der Integro-Differentialgleichungsansatz für Erdboden wirklich einwandfrei gültige Resultate liefert. Da nämlich in dem erwähnten generellen Ansatz eine Überlagerung (allerdings nur für die Verschiebungen der Unterlagenoberfläche!) steckt, und das Superpositionsgesetz meist mit dem Hookschen Gesetz verkoppelt ist, welch letzteres für Sand und Ton nicht gilt, so muß man vorweg grundsätzlich Zweifel gegen die Anwendung des Integro-Differentialgleichungsansatzes auf natürlichen Erdboden hegen.

4. Die Gleittheorie.

Diese Bedenken fallen restlos fort bei der Gleittheorie des Baugrundes, wie sie von Joachim Schultze, Fellenius und Pichera[32]) entwickelt und befürwortet wird. Diese Anschauungen laufen auf eine sinngemäße Erweiterung der Erddrucktheorie hinaus. Hier entsteht indessen eine andere außerordentlich große Schwierigkeit. Trotz mannigfacher Bemühungen von Freund in seinen älteren Arbeiten[32a]) ist es bis jetzt nicht einwandfrei gelungen, die Gleittheorie des Bodens mit der elastischen Formänderungstheorie des Tragwerks zu verkoppeln. Die Gleittheorie gilt daher, so weit sie überhaupt schon als genügend ausgebaut erscheint, ausschließlich für starre oder als starr zu betrachtende Grundtragwerke.

5. Schlußfolgerungen.

Es sind somit tiefliegende, grundsätzliche Schwierigkeiten und Bedenken vorhanden (von den ungeheuren mathematischen und praktisch-rechnerischen Schwierigkeiten der einzelnen Probleme ganz abgesehen), die sowohl die Anwendung des allgemeinen Wieghardtschen Integro-Differentialgleichungsansatzes als auch der Schultzeschen Betrachtungsweise dem praktischen Baustatiker unmöglich erscheinen lassen.

Es bleiben somit offenbar zur Zeit nur zwei wesensverschiedene Wege und deren Kombination für den Praktiker gangbar. Der erste Weg ist die Anwendung der Schwedlerschen Theorie und ihrer sinngemäßen Erweiterung, der andere der Verzicht auf jede theoretische Grundlage für die Bestimmung der Bodenpressungsverteilung, also willkürliche, vom statischen Gefühl geleitete Annahme einer Bodenpressungsverteilung, aus der dann die inneren Kräfte nach den üblichen Methoden der Statik zwangsläufig gefolgert werden können. (Scheidig.)

Hier sollen diese Alternativen nur in aller Kürze aufgerollt und prinzipiell untersucht werden. Zu diesem Zweck muß gefragt werden:

1. ob die bisherigen Erfahrungen ein Verlassen der Schwedlerschen Theorie wirklich notwendig erscheinen lassen und andererseits
2. ob die bisherige Forschung und Bauerfahrung dem Praktiker genügend Material an die Hand gibt, um seinem „statischen Gefühl“ ohne Stützung auf Rechnungsergebnisse die notwendige Zuverlässigkeit zu verleihen.

Beide Fragen müssen verneint werden. Bis jetzt ist in keinem einzigen wirklichen größeren Grundtragwerk die Bodenpressungsverteilung vollständig und direkt ermittelt worden. Die praktischen baulichen Erfahrungen mit der Schwedlerschen Theorie sind auf dem Gebiet des Oberbaues äußerst umfangreich und, soviel dem Verfasser bekannt ist, durchwegs günstig, auf dem Gebiete des Grund- und Wasserbaues ebenfalls recht umfangreich, und es ist kaum ein einziger Fehlschlag zu verzeichnen, der bei sachgerechter Anwendung der Schwedlerschen Theorie und bei einwandfreier Bauausführung vorgekommen wäre, also, es ist kaum ein einziger Fall bekannt, wo bauliche Mißerfolge wirklich der Schwedlerschen Theorie zuzuschreiben wären. Ganz besonders soll hervorgehoben werden, daß der von Scheidig konstruierte Widerspruch zwischen der Freundschen Schleusenbodentheorie und der Wirklichkeit, der bei einer Ausführung nach Freund angeblich zu einem Bruche führen könnte, auf einem Versehen beruht, wie dies Freund in einer kurzen Zuschrift trefflich nachgewiesen hat; der fragliche Fall zeigt vielmehr bei genauer Betrachtung besonders deutlich, wie sehr anpassungsfähig die Schwedler-Freundsche Theorie ist, so daß alles auf die richtige Wahl der beiden Grundkonstanten ankommt. (Siehe V 1.)

[32]) Joachim Schultze, Bodentragfähigkeit. Diese Zeitschrift S. 19. 1923. — W. Fellenius, Jordstatiska beräkningar for vertical belastning på horizontal mark under antagande av cirkulärcilindriska glidytor. Norrköping 1929. — Pichera, Druckverteilung, Erddruck, Erdwiderstand, Tragfähigkeit. Wien 1928.

[32a]) Diese auf das Stützmauerproblem bezgl. Schriften von Freund sind in vorl. Arbeit nicht angeführt.

Die wichtigen qualitativen Widersprüche mit der Erfahrung sind schon oben hervorgehoben worden. Diese Widersprüche bringen aber für die Bemessung der Grundtragwerke nur in den seltensten Fällen Gefahren mit sich[33]). Vor allem für durchlaufende Grundplatten und Balken mit vielen Feldern dürften die Schlußfolgerungen aus der Schwedlerschen Theorie, von den Rändern abgesehen, mit der Erfahrung besonders gut übereinstimmen. Bei Einzelfundamenten sind die Widersprüche auch für die Bemessungsaufgabe nicht ganz ohne Gewicht.

Wenn also, von Einzelfundamenten und anderen besonders liegenden Fällen abgesehen, keine Ursache zum Verlassen des Schwedlerschen Ansatzes und dessen Freundschen Verallgemeinerungen vorliegt, so fehlen andererseits die gesicherten Grundlagen für die von Scheidig befürwortete rein gefühlsmäßige Arbeitsweise. Die bisherigen Versuche beschränken sich auf wenige Typen von Anordnungen und sind, was noch viel schwerer wiegt, in recht kleinem Maßstabe ausgeführt. Modellgesetze für die wirklichen Bodenarten sind noch nicht bekannt, zum Teil wahrscheinlich auch nicht vorhanden. Eine Unterlage für die schätzungsweise Annahme der Pressungsverteilung in jedem Falle wird also nur auf Grund sehr lange fortzusetzender Forschungsarbeit vorhanden sein, wobei viel wichtiger als die Verfeinerung der Modellversuche die Durchführung von Formänderungsmessungen, sowie direkte Pressungsmessungen mit Meßdosen, an größeren Modellen und besonders auch an wirklichen Großtragwerken der verschiedensten Art sind, schließlich eine viel sorgfältigere Zergliederung etwaiger Mißerfolge von Bauausführungen als es bisher geschah. Trotzdem ist auch die weitere Forcierung der Meßgenauigkeit an kleinen Modellen keineswegs ohne Wert.

Solange aber diese breit angelegte und durch praktische Ähnlichkeitsbetrachtungen zu ergänzende Forschungsarbeit nicht durchgeführt ist, kann von dem Scheidigschen Vorschlag der gefühlsmäßigen Pressungsannahme nur entschieden abgeraten werden. Selbst der etwas abweichende Vorschlag von Franzius, der der Schwedlerschen Theorie schon einen gewissen Platz einräumt, läßt dem Gefühl und der Anschauung noch zu viel Spielraum. Es kann vielmehr die Schwedlersche Theorie für alle durchlaufenden Grundtragwerke empfohlen werden, mit geringen Korrekturen in der Nähe der Ränder auf Grund von Versuchen; auch für Schleusenböden und ähnliche Tragwerke dürfte die Theorie von Schwedler eventuell mit den Freundschen Erweiterungen ruhig angewendet werden mit nur geringen Abwandlungen unter Berücksichtigung des bisherigen knappen Versuchsmaterials. Nur für Einzelfundamente, besonders wenn sie erhebliche Steifigkeit aufweisen, und für ähnlich liegende Fälle kann die Bodenpressungsverteilung besser auf Grundlage der bisherigen Versuche als auf Grundlage der Schwedlerschen Theorie beurteilt werden. 233

[33]) Man erinnere sich zum Vergleich an die Grundannahmen der Eisenbeton-Berechnung, die ebenfalls eine Anzahl von physikalisch unwahrscheinlichen und der Erfahrung widersprechenden Elementen aufweisen und trotzdem als Ganzes in ihren praktischen Schlußfolgerungen durchaus brauchbar sind. Selbst der innere Widerspruch, der darin liegt, daß für die Bestimmung der statisch Unbestimmten das elastische, für die eigentliche Festigkeitsuntersuchung das Rißstadium zugrunde gelegt wird, beraubt die Untersuchung nicht ihrer Verläßlichkeit. Die einzelnen Annahmen sind eben so aufeinander abgestimmt, daß sie in den Endergebnissen in allen nicht extrem liegenden Fällen erfahrungsgemäß genügend genaue Ergebnisse liefern.

KLEINE MITTEILUNGEN

Zur graphischen Behandlung der ganzen rationalen Funktion. Ein wichtiger Gedanke für die vorteilhafte Gestaltung des Rechenschemas der ganzen rationalen Funktion besteht bekanntlich darin, die Kenntnis der Steigung

$$[p\,x] = \frac{g(x) - g(p)}{x - p}\,,$$

die man ja schon bei der Einsetzung eines Wertes p in $g(x)$ nach dem Hornerschen Schema[1])

a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
‖	$b_0 p$	$b_1 p$	...	$b_{n-2} p$	$b_{n-1} p$
b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}	$b_n = [p]$

in Gestalt der Koeffizientenreihe $b_0 \ldots b_{n-1}$ sozusagen geschenkt erhält, für die in Frage kommenden Rechenvorgänge weitgehend auszunutzen. Während das Lillsche graphische Schema die b_1 in einer der der a_1 völlig entsprechenden Anordnung für weitere Rechenschritte zur Verfügung stellt, liefert das Segnersche sie in keiner brauchbaren Ordnung, so daß man für eine Einsetzung in $[p\,x]$ genötigt ist, den Koeffizientenzug neu zusammenzusetzen.

Das Streben nach Vermeidung dieses Übelstandes hat mich auf ein neues graphisches Einsetzungsschema geführt, das obendrein den Vorzug nicht allein grundsätzlich, sondern auch praktisch größerer Einfachheit und Natürlichkeit hat.

Es sei ein rechtwinkliges Koordinatensystem[2]) mit geeigneten Einheiten für x und y festgelegt. In die Funktion

$$g(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

sei für x der Wert p einzusetzen.

Man trage auf der y-Achse in der y-Einheit die Koeffizienten $a_0 \ldots a_3$[3]) von O aus (also nicht

[1]) Die im obigen Schema verwendete gegenläufige Numerierung der Koeffizienten ist nicht allein aus formalen Gründen (um für $[p\,x]$ wieder die entsprechende Numerierung zu bekommen), sondern auch für die Praxis des graphischen Arbeitens der üblicheren gleichläufigen unbedingt vorzuziehen, da so die a_i bzw. die sie vertretenden Punkte gerade in der Reihenfolge der Indexnummern in das Verfahren eingehen. — $[p]$ steht folgerichtig für $g(p)$.

[2]) Um ein solches wird es sich in der Praxis zumeist handeln. An sich könnte das System ebensogut ein schiefwinkliges sein; auch auf ein projektives ist die folgende Konstruktion ohne weiteres zu übertragen.

[3]) In der Abb. 1 sind die a_i der Übersichtlichkeit zuliebe als positiv und mit 1 wachsend angenommen.

wie bei Segner hintereinander!) ab[4]), ziehe die Gerade $x = p$ und markiere den Punkt $P = (p-1, 0)$. Nun ziehe man durch den Punkt $(0, a_0)$ (in der Abb. 1 mit a_0[5]) bezeichnet) die

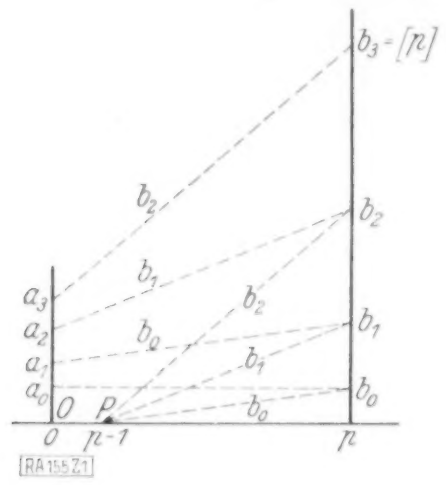


Abb. 1.

Parallele zur x-Achse; der Schnittpunkt mit der p-Ordinate heiße b_0 (wegen $a_0 = b_0$). Da die Gerade $P\,b_0$ die Richtungsgröße b_0 hat, schneidet die zu ihr parallele Gerade durch a_1 auf der p-Ordinate das Stück $a_1 + b_0\,p = b_1$ ab, die Parallele zu $P\,b_1$ durch a_2 das Stück b_2 und endlich die Parallele zu $P\,b_2$ durch a_3 das Stück b_3.

In der Praxis wird außer $x = p$ keine der Geraden wirklich gezeichnet. Man verfährt vielmehr so, daß man eine Kante eines durch ein zweites parallel geführten Zeichendreiecks zunächst an die x-Achse legt, dann bis a_0 verschiebt, b_0 markiert, die verwendete Kante bei Verschiebung beider Dreiecke um b_0 bis in die Richtung von $P\,b_0$ schwenkt, bis a_1 parallel verschiebt, b_1 markiert, usf. Vorteilhafter ist die Verwendung des in der Nautik gebräuchlichen Parallelenlineals (Doppellineal mit Parallelogrammführung).

Für das Zeichnen der Kurve empfiehlt es sich, die Gerade der b_1 glatt durchzuziehen, hierauf die Parabel der b_2 punktweise zu gewinnen (natürlich ohne sie wirklich zu zeichnen), usf. Ist das x-Intervall einigermaßen groß oder klein gegen 1, nimmt man wie beim Lillschen und beim Segnerschen Verfahren eine geeignete Transformation $x = m\,\bar{x}$ hinzu.

Zur Ermittlung der Tangente in einem Punkt $(p, [p])$, d. h. des Wertes $g'(p) = [p\,p]$ $(= c_{n-1}$ bei Fortsetzung des Hornerschen Schemas), setzt man nach dem gleichen Schema p für x in $[p\,x]$, ein, wobei man zweckmäßigerweise die p-Ordinate die Rolle der y-Achse übernehmen läßt. Die Einzeichnung der Tangente kommt dann ersichtlich formal auf die Fortführung des Schemas bis c_n hinaus[6]).

Die entsprechende Behandlung der Produktentwicklung

$$g(x) = a_0\,\{p\,q \ldots s\,t\} + a_1\,\{p\,q \ldots s\} + \ldots + a_{n-1}\,\{p\} + a_n\,,$$

wo $\{p\,q \ldots\}$ für das Produkt $(x-p)(x-q)\ldots$ steht, auf Grund des Rechenschemas

a_0	a_1	$\ldots$	a_{n-1}	a_n
$\parallel$	$\beta_0\,(u-t)$	$\ldots$	$\beta_{n-2}\,(u-q)$	$\beta_{n-1}\,(u-p)$
β_0	β_1	$\ldots$	β_{n-1}	$\beta_n = [u]$

[4]) Bereits diese Vereinfachung ist erheblicher, als der mit der Praxis des Verfahrens nicht Vertraute vermuten wird. Das Hintereinanderauftragen der a_1 nach Segner erschwert die Ausnutzung der Zeichenfläche (vermittels geeigneter Wahl der x-Achse und der y-Einheit) und ist besonders für den Lernenden eine kaum vermeidbare Fehlerquelle.

[5]) Bei der praktischen Durchführung schreibt man an die Punkte besser nur die Nummern 0 bis n.

[6]) Werden in allen ermittelten Punkten die Tangenten gewünscht, so konstruiert man besser $g'(x)$ unabhängig punktweise.

zeigt (für $n = 3$) die Abb. 2, die ohne nähere Erläuterung verständlich sein wird. Das einzige Neue ist, daß die a_1 (abgesehen von a_0, dessen Platz beliebig ist) statt auf der y-Achse jeweils bei demjenigen Bezugswert aufzutragen sind, der an der betreffenden Stelle der Entwicklung „verloren gegangen ist“[7]).

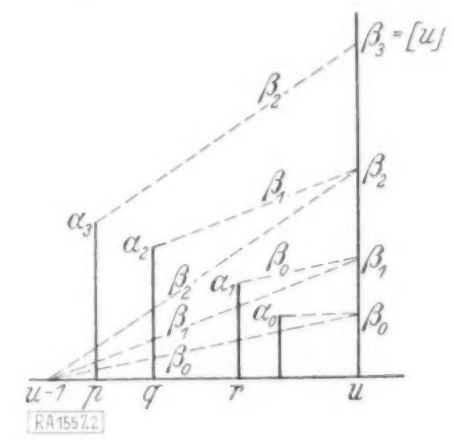


Abb. 2.

Für die Durchführung der Aufgabe, durch $n+1$ Punkte das Bild der durch sie bestimmten ganzen rationalen Funktion n-ten Grades zu legen, ist es natürlich erwünscht, die a_1 gleich an den richtigen Stellen des Zeichenschemas zu erhalten. Sind etwa (für $n = 3$) zu den x-Werten p, q, r, s die y-Werte $[p]$, $[q]$, $[r]$, $[s]$ gegeben und legt man für die Zeichnung der Kurve die Produktentwicklung

$$[x] = [p\,q\,r\,s]\,\{p\,q\,r\} + [p\,q\,r]\,\{p\,q\} + [p\,q]\,\{p\} + [p]$$

zugrunde, so hat man bei der sukzessiven Ermittlung der Steigungen des Schemas

p	q	r	s
$[p]$	$[q]$	$[r]$	$[s]$
	$[p\,q]$	$[p\,r]$	$[p\,s]$
		$[p\,q\,r]$	$[p\,q\,s]$
			$[p\,q\,r\,s]$

(wo $[p\,q] = ([q] - [p])\,/\,(q-p)$ usf., $[p\,q\,r] = ([p\,r] - [p\,q])\,/\,(r-q)$ usf.) nur darauf zu achten, daß jede auftretende Steigung in der Zeichnung gerade bei dem im Schema darüber stehenden Bezugswert aufgetragen erscheint[8]).

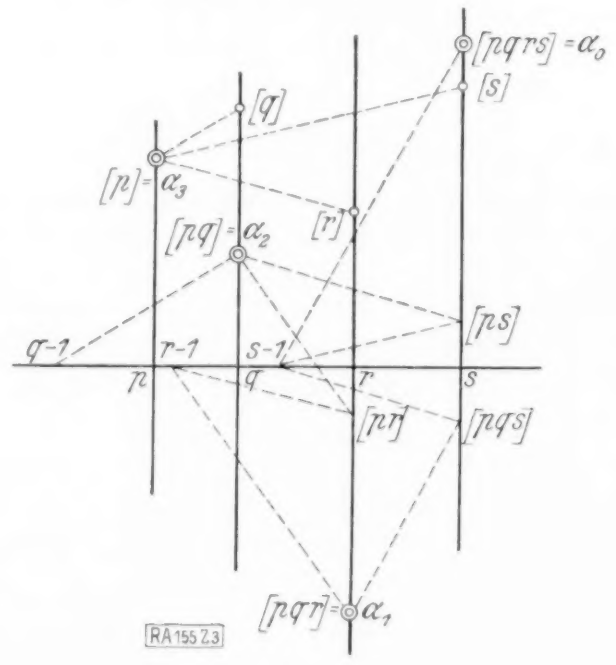


Abb. 3.

Abb. 3 zeigt die praktische Durchführung. Auch hier werden nur die ausgezogenen Linien wirklich gezeichnet.

Halle. Heinrich Behmann. 155

[7]) Bzw. „verloren geht“, wenn man die a_1 als Steigungen geschrieben denkt.

[8]) Ist es einem nur um das graphische Bild, nicht um den analytischen Ausdruck, zu tun, wird man natürlich nach der Einzeichnung der gegebenen Punkte noch über die x-Einheit passend verfügen.

BUCHBESPRECHUNGEN

(Die hier angezeigten Bücher sind durch die VDI-Buchhandlung Berlin NW 7, Ingenieurhaus, zu beziehen.)

Dr. TAKASHI **INADA,** Professor an der Kaiserl. Kyushu Universität Fukuoka, Japan. Die Berechnung auf vier Seiten gestützter rechteckiger Platten. Mit 14 Textabbildungen. Verlag Springer, Berlin 1930. 17 S. Preis 2 M.

Die auf vier Seiten gestützte rechteckige Platte wird untersucht bei der Belastung durch hydrostatischen Druck und bei dem Angriff durch eine konzentrierte Einzellast an beliebiger Stelle. Zur Grundlösung, d. i. zu einer partikulären Lösung der Plattendifferentialgleichung, werden als Zusatzlösungen Ausdrücke angeschlossen, die den Randbedingungen des Problems genügen. Der Verfasser berechnet die folgenden Beispiele für quadratische Platten. 1. Auf eine geradlinig frei gestützte Platte wirkt ein in einer Diagonalrichtung linear zunehmender Druck. 2. Die am Umfang befestigte Platte ist so belastet, als wenn sie die Wand eines Wasserbehälters wäre. 3. Die vierseitig frei gelagerte Platte aus Flußeisen von 900 mm Seitenlänge und 10 mm Stärke ist durch eine Einzellast von 1000 kg beansprucht, im Abstand von einem Viertel der Stützweite von einer der Quadratseiten und in der diese Quadratseite halbierenden Symmetralen. Die Ausbiegungen werden in den zwei durch den Lastpunkt parallel zu den Seiten gehenden Linien bestimmt und mit einem Versuch kontrolliert. Die beobachteten Ausbiegungen zeigen sich im Durchschnitt um etwa 14 vH größer als die rechnungsmäßigen.

Ratzersdorfer. 239

Dr. FUKUHEI **TAKABEYA**, Professor an der Kaiserl. Hokkaido-Universität Sapporo, Japan. Rahmentafeln. Mit 186 Textabbildungen. Verlag Springer, Berlin 1930. VI + 117 S. Preis 16 M, geb. 17 M.

Der Verfasser behandelt zwei- und mehrstielige Stockwerkrahmen unter beliebigem lotrechten Lastangriff in den einzelnen Riegeln und waagerechten Einzellasten in den äußeren Riegelknotenpunkten. Die Berechnung dieser vielfach statisch unbestimmten Tragwerke erfolgt in bekannter Weise so. Als Unbekannte der Elastizitätsgleichungen werden die Knotendrehwinkel und die Stabdrehwinkel des Systems eingeführt. Die Zahl der Knotendrehwinkel ist gleich der der Knotenpunkte, die Zahl der Stabdrehwinkel ist nun, bei Vernachlässigung der Stabdehnungen, gleich der Stockwerkzahl. Man kann die Endmomente der Stäbe durch die Knotendrehwinkel, die Stabdrehwinkel und die Stabbelastung ausdrücken und hat an Gleichungen zur Verfügung: die Knotengleichungen, die aussagen, daß die Summe der Anschlußmomente in einem Knotenpunkt gleich Null ist und die Gleichgewichtsbedingungen, die je für alle Stiele eines Stockwerks aufgestellt werden, da für die Summe dieser Stiele die Querkraft bekannt ist. Es besteht also Bilanz zwischen Unbekannten und Gleichungen. Das Neue des Verfahrens liegt jetzt darin, daß die Gleichungen in einer übersichtlichen (tabellarischen) Form angeordnet sind und ihr Ansatz sehr leicht und mechanisch erfolgen kann. Es erscheint erwähnenswert, daß auch bei einer unsymmetrischen Gestalt des Tragwerks die Koeffizientenmatrix der Elastizitätsgleichungen eine Symmetrie zur Hauptdiagonale besitzt. Die Gleichungsauflösung erfolgt mit einem Iterationsverfahren, wobei in sukzessiven Näherungen richtigere Wurzeln gefunden werden, bis schließlich aufeinanderfolgende Werte der Unbekannten sich praktisch nicht mehr unterscheiden [1]).

Der zweite Abschnitt des Buches (S. 68 bis 117) gibt in Tafeln die Stabendmomente von verschiedenen so berechneten Rahmen an, bei denen das Verhältnis Stablänge : Querschnittsträgheitsmoment für sämtliche Stäbe konstant ist. Bei den einzelnen Lastzuständen sind diese Momente an den Knotenpunkten für den Lastwert „Eins" des belasteten Stabes eingetragen und sie sind bei einem bestimmten Kraftangriff mit einem Lastglied zu multiplizieren, das z. T. wieder Tabellen entnommen werden kann. Im gegebenen ganz besonderen Fall wird die Verwendung der Tafeln von bedeutender Arbeitsersparnis sein.

Ratzersdorfer. 239

Dr. RICHARD VON **MISES,** ord. Prof. a. d. Universität Berlin, Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik. I. Bd.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. X + 574 S. mit 90 Abb. im Text. Verlag Franz Deuticke, Leipzig-Wien 1931. Preis geb. 33 M.

Mit diesem Werk hat der Verf. die Aufgabe gelöst, zu der er vor allen berufen war, nämlich ein Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu schreiben, das diese Disziplin nach jahrzehntelanger Verwahrlosung endlich in der einer mathematischen Theorie würdigen Form darstellt. Die Möglichkeit hierzu war erst gegeben, nachdem v. Mises die zwar früher schon von anderen verfochtene, aber nie konsequent durchgeführte Idee, daß der Grundbegriff, die Wahrscheinlichkeit, als Grenzwert einer relativen Häufigkeit zu fassen sei, mit aller Entschiedenheit postuliert und in seinen Zeitschriften-Veröffentlichungen seit 1919 zur alleinigen Grundlage einer wirklich durchgeführten Theorie gemacht hat.

Das Anwendungsgebiet der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind die Massenerscheinungen, und bei diesen muß, wie eigentlich schon die einfachsten Überlegungen zeigen, die alte Auffassung von einer „apriorischen Wahrscheinlichkeit", die auf einer Einteilung in „gleichmögliche Fälle" und Auslese der „günstigen" beruht, scheitern. Der Statistiker z. B. spricht bei „sehr vielen" Versuchen von der relativen Häufigkeit eines Merkmals, und diese Größe wird nun dadurch zu einem exakten mathematischen Begriff und einer mathematischen Untersuchung zugänglich, daß man theoretisch von einer Gesamtheit von unbegrenzt vielen Versuchen (Kollektiv) ausgeht und für die relative Häufigkeit eines Merkmals bei den n ersten Versuchen einen Grenzwert für $n \to \infty$ voraussetzt. Die so begründete Wahrscheinlichkeitsrechnung läßt sich dann auf die Erfahrungswelt in demselben Sinne anwenden wie etwa die Geometrie oder Mechanik: Es werden in der Praxis nie die theoretischen Postulate exakt erfüllt sein, was sich ja auch gar nicht konstatieren ließe, sondern nur angenähert und so weit, daß man mit vernünftigen Gründen die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Bearbeitung des betr. Materials verwenden wird. Nur der Erfolg kann nachträglich die Berechtigung der Anwendung in dem konkreten Fall erweisen, während ein etwaiger Mißerfolg zeigt, daß eben die Voraussetzungen der Theorie nicht erfüllt waren, aber nicht, daß die Theorie falsch ist. Wenn auch von

[1]) Hier verweisen wir auf die umfassenden Untersuchungen von R. v. Mises und H. Pollaczek-Geiringer. Diese Zeitschr., Bd. 9 (1929), S. 58/77 und 152/164.

diesem Standpunkt aus es sehr wohl denkbar wäre, daß man Massenerscheinungen mit noch anderen (bisher nicht existierenden) Methoden angreifen könnte, so zeigt doch gerade die neueste Entwicklung, daß die theoretische Physik geradezu nach einer Wahrscheinlichkeitsrechnung der Misesschen Art verlangt. In dieser verschwinden mit einem Schlag die mystischen Nebel, die in den meisten Darstellungen aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung etwas machen, was man schlechterdings nicht mehr als Mathematik bezeichnen kann, und die so beliebten „Paradoxa" lösen sich in Trivialitäten auf.

Was nun den Gegenstand einer Wahrscheinlichkeitsrechnung im obigen Sinn angeht, so ist zu sagen, daß es sich bei ihr um gar nichts anderes handeln kann, als daß gewisse Kollektive mit bekannten Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, und daß aus ihnen neue Kollektive gebildet werden, deren Wahrscheinlichkeiten man berechnen soll, genau wie die Geometrie nichts anderes tut, als aus geometrischen Daten geometrische Ergebnisse herzuleiten. Dabei treten entweder endlich viele oder unbegrenzt viele Kollektive auf, und hiernach sind die zwei ersten Abschnitte des Buches, die die eigentliche theoretische Wahrscheinlichkeitsrechnung enthalten, gegliedert: der erste bringt die Grundoperationen (Auswahl, Mischung, Teilung, Verbindung) in endlich öftmaliger Anwendung, der zweite die sogenannten Grenzwertsätze (Bernoullisches und Bayessches Theorem, Gesetze der großen Zahlen, die Fundamentalsätze), die hier im Gegensatz zur alten Theorie den Charakter echt wahrscheinlichkeitstheoretischer Aussagen erhalten und in einer, der Lehrbuch-Literatur über diesen Gegenstand sonst leider recht fremden Klarheit auseinandergesetzt werden. Hervorgehoben zu werden verdient, daß der Verf. in diesem Werk, das als Lehrbuch gedacht ist, den Standpunkt höchster Allgemeinheit, den er in seinen früheren Zeitschriften-Publikationen einnahm (Verteilungen allgemeinster Art und dementsprechend Verwendung von Stieltjesschen Integralen) zugunsten einer größeren Verständlichkeit verlassen hat, indem er sich auf die sog. arithmetischen und geometrischen Verteilungen beschränkte und die Beweise häufig für beide getrennt durchführte. Das wird ihm mancher danken, der sich vielleicht durch die Allgemeinheit der Originalveröffentlichungen abgeschreckt fühlte und jetzt sieht, daß d i e s e Wahrscheinlichkeitsrechnung im Grunde auch nicht schwieriger ist als die a l t e, dafür aber sehr viel klarer.

Mehr als die Hälfte des Buches — das macht es für die Leser der Zamm besonders wichtig — nehmen die Anwendungen in der Statistik und in der theoretischen Physik ein. Man findet hier einerseits Dinge wie die Lexissche Dispersionstheorie, die Korrelationslehre und Fehlertheorie, andererseits Gas- und Strahlungstheorie, Schwankungserscheinungen, Brownsche Bewegung und Ergodenprobleme, die alle auf der Grundlage der in den zwei ersten Abschnitten entwickelten Theorie ausführlich und exakt durchgearbeitet werden. Diese inhalts- und umfangreichen Darlegungen rechtfertigen vollauf die Einreihung des Buches als 1. Band in einen geplanten Zyklus von Bänden über angewandte Mathematik. Die „Anwendung" besteht hier nicht, wie leider sonst manchmal bei mathematischen Büchern, darin, daß man sie dem Leser überläßt, sondern es werden hier wirklich praktische Probleme, die heute brennend sind, mit hochwertigem mathematischen Rüstzeug angepackt und bis zu handgreiflichen Ergebnissen durchgearbeitet.

Freiburg i. B. D o e t s c h. 230

Handbuch der Vermessungskunde von weil. Dr. phil. h. c. W. **JORDAN**, Prof. an der Technischen Hochschule zu Hannover, fortgesetzt von weil. Dr. C. **REINHERTZ,** Prof. an der Technischen Hochschule zu Hannover. Zweiter Band, Erster Halbband: F e l d - u n d L a n d m e s s u n g. Mit zahlreichen Figuren und Abbildungen. Neunte, erweiterte Auflage, bearbeitet von Dr. O. **Eggert,** Prof. an der Technischen Hochschule zu Berlin. Verlag Metzlersche Verlagsbuchhandlung, Stuttgart 1931. XIV + 572 S. Preis geb. 29,50 M.

Der 2. Band des Handbuches der Vermessungskunde ist von O. E g g e r t einer gründlichen Neubearbeitung unterzogen worden. Erschienen ist der erste Halbband, der die ersten 9 Kapitel des im Jahre 1914 in 8. Auflage erschienenen 2. Bandes des Handbuches umfaßt. Inhaltlich enthält er diejenigen Teile der Vermessungskunde, die bei der Kleintriangulierung, der Polygonisierung und der Bearbeitung der Geländeaufnahmen Verwendung finden. Die großen Fortschritte des Vermessungswesens in der Kriegs- und Nachkriegszeit sind weitgehend berücksichtigt. Besonders die der Instrumentenkunde gewidmeten Kapitel sind sehr bereichert, auf den neuzeitlichen Stand gebracht und somit den Bedürfnissen der Praxis angepaßt. Die Darstellung gewährt einen vortrefflichen Überblick: zahlreiche Figuren und Abbildungen erleichtern das Verständnis.

Den Mathematiker dürften vornehmlich interessieren: die recht vollständig gehaltene Darstellung der Planimeter, die Einfügung der Gauß-Krügerschen Koordinaten, die neuen Genauigkeitsuntersuchungen der Punkteinschaltungen bei Triangulationen, schließlich die polygonometrischen Messungen, deren Auswertung insbesondere durch eigene Arbeiten des Herausgebers wertvolle Ergänzungen erfahren hat.

Dem Werke vorangesetzt ist ein schönes Bild und eine Lebensschilderung des Begründers des Handbuches, W. Jordan, aus dessen Sohnes Feder.

Zusammenfassend muß hervorgehoben werden, daß der Halbband in seiner neuen Form den jetzigen Stand der Feld- und Landmessung erschöpfend wiedergibt. O. E g g e r t hat dem Fachmann das beste Orientierungs- und Nachschlagewerk, dem Studierenden das ausführlichste Lehrbuch neu in die Hand gegeben. Möge der 2. Halbband des 2. Bandes, der die Höhenmessungen, die tachymetrischen, die topographischen und photogrammetrischen Geländeaufnahmen und die Vermessungsarbeiten für Ingenieurbauwerke enthalten wird, recht bald erscheinen. S c h m e h l. 232

Dr. H. **THORADE**, P r o b l e m e d e r W a s s e r w e l l e n. Bd. XIII und XIV der „Probleme der Kosmischen Physik". Hrsg. von Prof. Dr. Chr. J e n s e n und Prof. Dr. Arnold S c h w a ß m a n n. Verlag Henri Grand, Hamburg 1931. VIII + 219 S. Mit 5 Bildern in Lichtdruck, 4 Karten und 110 Abb. auf 11 Tafeln. Preis 20 M.

Die Aufhellung der Natur der Wasserwellen ist nicht nur für die Ozeanographie von großem Interesse, auch die Praxis des Schiffbaues, des Hafenbaues und der Schiffahrt benötigen in immer steigendem Maße der Ergebnisse der Wellenlehre. Aber bisher sind in diesem Wissensgebiet, abgesehen von den Grundtatsachen, Theorie und Beobachtung unabhängige Wege gegangen und höchst selten ist versucht worden, die Kluft zwischen Theorie und Beobachtung zu überbrücken. Der Hauptgrund mag wohl darin liegen, daß die Theorie sich oft in Details mehr mathematischer Arbeit ergeht und die Beobachtungen aus dem Auge verliert, die Bearbeiter neueren Beobachtungsmaterials hingegen zu wenig theoretisch ge-

schult sind, um die Ergebnisse der Beobachtung an der Theorie bis in Einzelheiten hinein zu prüfen. So drohte der Mißstand, daß die so wertvolle gegenseitige Förderung von Theorie und Beobachtung für das noch lange nicht genügend ausgeschöpfte Gebiet der Wellenerscheinungen verlorengeht und der Fortschritt stockt. Thorades Buch wird diesem Mißstand gewiß Abhilfe bringen. Die Theoretiker finden darin, was bei den Wellen noch ungeklärt ist, welche Punkte der bestehenden Theorie fallen gelassen werden müssen, um mit den Beobachtungen in Übereinstimmung zu bleiben, und nach welcher Richtung sie ergänzt werden müssen. Den Beobachtern wird vorgeführt, wo noch Beobachtungsmaterial fehlt und wie es beschaffen sein muß, um eine Prüfung der Theorie zu ermöglichen. Thorades Lehrbuch der Wellen ist kein Lehrbuch der Wellenerscheinungen, es ist aber ein Buch, das jene zur Hand nehmen werden, die theoretisch oder praktisch mit Wellen jeder Art zu tun haben. A. Defant. 236

A. **SCHOENFLIES**, weil. Professor an der Universität Frankfurt a. M. Einführung in die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Zweite Auflage bearbeitet und durch sechs Anhänge ergänzt von M. Dehn, Professor an der Universität Frankfurt a. M. Mit 96 Textfiguren. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Bd. 21. Verlag Springer, Berlin 1931. X + 414 S. Preis 25 M, geb. 26,60 M.

An der Anlage des Hauptteils, dessen Aufbau sich auf die Euklidische Geometrie gründet und die Geometrie der projektiven, der affinen und der Euklidischen Gruppen behandelt, ist für die neue Auflage nichts geändert. Im einzelnen wurden aber vielerlei Verbesserungen vorgenommen und mancher Schönheitsfehler beseitigt. Der größte Unterschied der neuen Auflage gegenüber der ersten besteht aber in der wesentlichen Ausgestaltung des Anhangs, der sich mehrfach über das Niveau eines Anfängers erhebt und sich öfters nur an reifere Leser wendet. So wurden die Aufgaben und Beispiele durch die Ausführungen eines besonderen Abschnittes erweitert. Die lineare Algebra in Verbindung mit der Geometrie wurde wesentlich breiter und nach modernen Gesichtspunkten entwickelt. Eine historische Übersicht ist neu aufgenommen. Ein letztes Stück des Anhangs handelt von der Zerlegung ebener Figuren in Rechtecke, einem Stück der eigensten Geisteswerkstatt des Herausgebers, einem Gebiet, das erst noch der analytischen Behandlung zuzuführen wäre. Auch die neue Auflage ist gerade angesichts ihres ganz elementaren Charakters eine sehr empfehlenswerte Einführung in die analytische Geometrie namentlich auch für solche, denen das Studium der analytischen Geometrie keinen Selbstzweck bedeutet. Bieberbach. 240

WILHELM **BLASCHKE,** Professor der Mathematik an der Universität Hamburg. Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie. I. Elementare Differentialgeometrie. Dritte, erweiterte Auflage. Bearbeitet und herausgegeben von Gerhard Thomsen, Professor der Mathematik an der Universität Rostock. Mit 35 Figuren. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Bd. I. Verlag Springer, Berlin 1930. Preis 18 M, geb. 19,60 M.

Die neue Auflage hält an der bewährten vektoriellen Behandlung der früheren fest. Das Buch dürfte schon deswegen für die Leser dieser Zeitschrift nach wie vor eine besonders geeignete Einführung in die Differentialgeometrie darstellen. Gegenüber der zweiten ist die dritte Auflage um 69 Seiten stärker geworden. Das ist durch verschiedene Zusätze bedingt. Wir heben einige derselben hervor. Zunächst eine Einleitung über Vektoren und Invarianten, Aufzählung aller Invarianten einer Kurve, die Behandlung der Raumkurven konstanter Krümmung im großen nach E. Schmidt, Betrachtungen über Flächenstreifen, die Parallelverschiebung Levi-Civitas, die Lehre von den invarianten Ableitungen, isometrische Abbildungen mit Erhaltung der Krümmungslinien. Sicher wird das Buch sich in seiner neuen verbesserten und erweiterten Gestalt noch manchen neuen Freund erwerben. Bieberbach. 240

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Dr.-Ing. ROBERT **SCHÖNHÖFER**, ord. Professor an der Technischen Hochschule in Braunschweig, Wirtschaftliche Stützung von Traggebilden. Zeichnerische und rechnerische Verfahren zum wirtschaftlichen Vorentwerfen von Bauwerken (Decken, Dächer, Hallen, Brücken usw.) unter Berücksichtigung der von seiten der Praxis gegebenen Bedingungen und Wünsche. Univ.-Verlag Robert Noske, Leipzig 1931. VIII + 185 S. Preis 15 M.

Dr. FRIEDRICH **DRENCKHAHN,** Professor am Pädagogischen Institut in Rostock, und Dr. ERICH **SCHNEIDER**, Studienrat am Bismarck-Real-Gymnasium in Dortmund, Wirtschaft und Mathematik. Eine Einführung in die mathematische Behandlung wirtschaftlicher Probleme unter Zugrundelegung des Funktionsbegriffs. (Mathem.-phys. Bibl., Bd. 77) Verlag B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1931. IV + 46 S. mit 35 Fig. im Text. Preis 1,20 M.

L. M. **MILNE-THOMSON,** Assistant Professor of Mathematics in the Royal Naval College, Greenwich. Die elliptischen Funktionen von Jacobi. Fünfstellige Tafeln, mit Differenzen, von sn$u$, cn$u$, dn$u$ mit den natürlichen Zahlen als Argument, nach Werten von $m\,(=k^2)$ rangiert, nebst Formeln und Kurven. Verlag von Julius Springer, Berlin 1931. XIV + 69 S. Preis 10,50 M.

Dr. V. **KOMMERELL,** Oberstudiendirektor, Vorstand der Oberrealschule in Tübingen, Honorarprofessor an der Universität Tübingen, und Dr. K. **KOMMERELL**, o. ö. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen. Bd. 20 und 21 der Sammlung Göschens Lehrbücherei, 1. Gruppe: Reine und angewandte Mathematik. I. Krümmung der Raumkurven und Flächen. 205 S. mit 38 Fig. Preis geb. 10 M. II. Kurven auf Flächen. Spezielle Flächen. Theorie der Strahlensysteme. 194 S. mit 22 Fig. Preis geb. 10 M. Verlag Walther de Gruyter & Co., Berlin und Leipzig 1931.

Dr.-Ing. GUSTAV **FLÜGEL,** o. Prof. für Dampfturbinen, Propeller und Strömungsphysik an der Techn. Hochschule Danzig, Die Dampfturbinen, ihre Berechnung und Konstruktion. Mit einem Anhang über die Gasturbinen. Verlag Joh. Ambros. Barth, Leipzig 1931. VIII + 324 S. mit 297 Fig. im Text. Preis brosch. 34,50 M, geb. 37 M.

JOACHIM **BRÄMER,** Vom Wesen und Werden technischer Veröffentlichungen. (X. Bericht der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, E. V., Berlin-Adlershof.) Verlag R. Oldenbourg, München 1931. 9 S. mit 14 Abb. Preis geh. 1.40 M.

Technische Übungsaufgaben für darstellende Geometrie. Herausgeg. von Dr. Erwin Kruppa, o. ö. Professor an der Techn. Hochschule in Wien. Unter Verwendung der gleichnamigen Aufgabensammlung von Prof. Dr. Emil Müller und Mitwirkung von Dr.-Ing. Anton E. Mayer. 1. Mappe. 12 Blatt. Verlag Franz Deuticke, Leipzig-Wien 1932.

Dr. LUDWIG **BIEBERBACH,** ord. Prof. an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin, Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften, Projektive Geometrie. Bd. 30 der Sammlung Teubners mathematische Leitfäden. Verlag B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1931. IV + 190 S. mit 45 Fig. im Text. Preis kart. 7.80 M.

Dr.-Ing. M. **LIWSCHITZ,** Oberingenieur der Siemens-Schuckert-Werke Berlin. Die elektrischen Maschinen. Bd. I: Allgemeine Grundlagen. 2. erw. u. verb. Aufl. Verlag B. G. Teubner, Leipzig-Berlin 1931. X + 381 S. mit 374 Abb. im Text. Preis geb. 18 M.

NACHRICHTEN

Zum 80. Geburtstag Martin Grüblers.

Am 19. Dezember feiert Martin Grübler, Geheimer Hofrat, Dr. phil. h. c., Dr. art. ing. h. c., emeritierter ordentlicher Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Dresden, seinen 80. Geburtstag. Grübler, der in Meerane (Sachsen) geboren wurde, hat in Dresden als Bauingenieur, später auch als technischer Oberlehrer studiert. Er war erst in Zürich, dann in Dresden Privatdozent und wurde 1886 als Ordinarius für Mechanik und Festigkeitslehre an das Polytechnikum nach Riga berufen. 1895 bis 1900 lehrte er Mechanik an der Bauingenieurabteilung der Technischen Hochschule Berlin und folgte 1900 als Nachfolger Otto Mohrs einem Ruf an die Technische Hochschule Dresden. Hier war er bis zu seiner Emeritierung im Jahre 1920 tätig. Seine Arbeiten behandeln vorwiegend das Gebiet der Kinematik; daneben beschäftigte er sich mit verschiedenen Fragen der Festigkeitslehre und der Turbinentheorie. In letzter Zeit ist Grübler eifrig bestrebt, die bei der Verwendung des Massen- und Gewichtsbegriffs in der Mechanik historisch entstandenen Unklarheiten durch einwandfreie Fassung der Begriffe zu beseitigen.

Die Not der technisch-wissenschaftlichen Zeitschriften.

Der Deutsche Verband Technisch-Wissenschaftlicher Vereine, dem auch unsere Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik angehört, erläßt das folgende Rundschreiben, das genaueste Berücksichtigung verdient:

Die immer drückender werdende Wirtschaftsnot hat auch nicht vor den technisch-wissenschaftlichen Fachvereinen und vor den von ihnen herausgegebenen Zeitschriften Halt gemacht. Für die Herausgabe der Zeitschriften sind nur noch so geringe Mittel verfügbar, daß der Textteil schon jetzt in empfindlichem Maß eingeschränkt werden mußte. Diese Einschränkung läßt befürchten, daß wertvolle Arbeiten nicht mehr oder nur sehr verspätet veröffentlicht werden können. Dabei wachsen ständig die von Technik und Forschung gestellten Ansprüche, und man kann mit Sicherheit annehmen, daß die Zahl der literarischen Arbeiten weiter zunehmen wird. Diese Schwierigkeiten bedrücken die Schriftleitungen wie die Verfasser in gleicher Weise. Beide müssen daher vertrauensvoller und enger als je zusammenarbeiten, um die bestehende Notlage zu mildern.

In diesem Sinne wenden sich die technisch-wissenschaftlichen Vereine und die von ihnen herausgegebenen Zeitschriften an ihre Mitarbeiter. Um den verfügbaren Raum möglichst gut auszunutzen und vielen Mitarbeitern dienstbar zu machen, richten sie an die Verfasser die dringende Bitte, sich in ihren Handschriften auf das unbedingt Notwendige und das Wertvollste zu beschränken. Die früher wohl berechtigte Vollständigkeit und Ausführlichkeit muß heute der kürzesten Fassung der Gedanken und Ergebnisse weichen, was den Wert der Aufsätze nicht zu beeinträchtigen braucht.

Der Mangel an Raum zwingt ferner die Schriftleitungen, den Platz in ihren Zeitschriften insbesondere den Beiträgen aus ihrem Arbeitsgebiet vorzubehalten. Bei Zweifeln über die Eignung eines Aufsatzes für eine Zeitschrift empfiehlt sich eine Anfrage bei der Schriftleitung. Doppelveröffentlichungen über denselben Gegenstand sind (heute mehr denn je) zu vermeiden.

Die im Deutschen Verband Technisch-Wissenschaftlicher Vereine zusammengeschlossenen Körperschaften und die Schriftleitungen der von ihnen herausgegebenen Organe bitten somit ihre Mitarbeiter dringend, diesen Gesichtspunkten Rechnung zu tragen; denn nur durch diese Notmaßnahmen wird es gelingen, die für die Technik unentbehrlichen Fachzeitschriften über die heutige Wirtschaftskrise hinaus lebensfähig zu erhalten.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Ortsgruppe Berlin.

Am 27. November sprach Hr. Priv.-Doz. Dr.-Ing. F. Weinig (Berlin) „Zur Frage der Abrundung und Zuschärfung umströmter Kanten".

Anfang Januar wird ein Vortrag von Hrn. Prof. Dr. A. Korn (Berlin) über „Probleme, die sich auf mehrlagige Spulen in der Elektrotechnik beziehen" stattfinden.

Persönliches.

Hr. Prof. Dr. B. Schilling ist nach zweijähriger Tätigkeit an der Universität Santiago (Chile) wieder als a. o. Professor für Mathematik an die Technische Hochschule Dresden zurückgekehrt.

Hr. Dr.-Ing. F. Weinig hat sich an der Technischen Hochschule Charlottenburg für technische Strömungslehre habilitiert.

Hr. Dr.-Ing. G. Weinblum hat sich an der Technischen Hochschule Charlottenburg für Mechanik des Schiffes habilitiert.

Für die Schriftleitung verantwortlich: Professor Dr. von Mises, Berlin NW 87, Siegmundshof 9;
für den Anzeigenteil: Peter Valerius, Berlin NW 40. — Copyright 1931 by VDI-Verlag G. m. b. H., Berlin NW 7.
Druck von A. W. Ziekfeldt, Osterwieck am Harz.

Das Inhaltsverzeichnis

1921 bis 1930 (Bd. 1 bis 10)

der „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“
ist soeben erschienen!

Der im ersten Jahrzehnt des Bestehens der Zeitschrift behandelte Stoff wird hier erschlossen. Die 95 Fachgruppen des Sachverzeichnisses sind ein Zeichen der großen Zahl von Problemen, die in diesen zehn Jahren behandelt wurden. Das Verfasserverzeichnis weist über 350 Namen führender Wissenschaftler auf, die mit mehr als 700 Beiträgen dazu geholfen haben, die Grundwissenschaften des Ingenieurs auszubauen. — Das Inhaltsverzeichnis stellt somit eine umfangreiche Stoffsammlung über alle durch den Zeitschriftentitel ausgewiesenen Stoffgebiete dar.

Format 190 × 270 mm, 52 Seiten.
Broschiert RM 8.— (für Mitgl. d. VDI, DMV u. G. f. a. M. u. M. RM 7.20)

Durch jede Buchhandlung zu beziehen!

VDI-Verlag / Berlin NW 7

Logarithmenpapiere

Koordinatenpapiere
für statistische Zwecke
Diagrammblätter
Indikatorblätter
Registrierrollen
in verschied. Ausführungen

Millimeterpapiere

in Rollen, Bogen und Blocks, auch Dinformate, fertigen als Sonderheit

Carl Schleicher & Schüll
Düren (Rheinland)
Fabrik feinster Maßpapiere

A. Bezugsbedingungen

Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik“ erscheint jeden zweiten Monat (Februar, April, Juni usw.) und kann durch den Verlag und den Buchhandel bezogen werden. Der Bezug der Zeitschrift läuft und erneuert sich für das Inland von Halbjahr zu Halbjahr und für das Ausland von Jahr zu Jahr. Abbestellungen sind 4 Wochen vor Halbjahres- bzw. Jahresschluß einzureichen. Die Zustellung der Zeitschrift wird durch Kreuzband vorgenommen.

Die Bezugsgebühren sind stets zu Beginn eines neuen Halbjahres oder Jahres fällig und werden bei Ausbleiben nach erfolgter Zahlungsaufforderung in der Zeitschrift durch Nachnahme eingezogen. Sie betragen:

Inland (einschließlich Danzig, Memel- und Saargebiet):
jährlich **RM 30.—**; für Mitglieder des VdI, der DMV und der G. f. a. M. u. M. **RM 27.—**
halbjährlich **RM 15.—**; „ „ „ „ „ „ „ „ „ **RM 13.50**

Ausland mit vollem Drucksachenporto (Vereinigte Staaten von Amerika, Australischer Bund, Bolivien, Britisch-Indien, China, Dänemark, Großbritannien, Italien, Japan, Kanada, Niederländisch-Indien, Norwegen, Peru, Schweden): Jährlich **RM 31.80**; für Mitglieder der genannten Vereine **RM 28.80** einschl. Portokosten.

Übriges Ausland mit ermäßigtem Drucksachenporto: Jährlich **RM 30.90**; für Mitglieder der genannten Vereine **RM 27.90** einschl. Portokosten.

Einzelheftpreis: RM 6.—; für Mitglieder RM 5.40 zuzüglich 15 Pfg. Porto (Ausland 20 Pfg.).
Erfüllungsort: Berlin, Gerichtsstand: Berlin-Mitte.

ZUR BEACHTUNG!

Lieferungsstörungen werden am schnellsten beseitigt, wenn das Ausbleiben der Zeitschrift umgehend mitgeteilt wird.

Um- und Abbestellungen sind stets dorthin zu richten, wo die Bestellung aufgegeben wurde.

Bei Zuschriften und Zahlungen wird um genaue Angabe der vollständigen Anschrift und des Verwendungszweckes gebeten, da nur dadurch Verwechslungen und Lieferungsstörungen vermieden werden.

B. Anzeigenpreise

Seite	1/1	1/2	1/4	1/8
	150 × 235 mm	150 × 115 mm	115 × 72 mm	72 × 55 mm
Reichsmark	160.—	90.—	50.—	30.—

Ab 1. Januar 1931 wird laut Beschluß der Arbeitsgemeinschaft technisch-wissenschaftlicher Zeitschriftenverleger auf die Nettopreise ein **Preissenkungsnachlaß von 5 %** eingeräumt.

Nachlaß: Bei 6 Aufnahmen im Jahr 10 vH. Für Vorzugsseiten gelten besondere Preise.

Erscheinungstag: Jeden 5. der geraden Monate; Annahmeschluß für Anzeigen: 10 Arbeitstage vor Erscheinen.

Der Verlag behält sich vor, die Aufnahme von Anzeigen und Beilagen ohne Angabe von Gründen abzulehnen und laufende Aufträge einzustellen. Erfüllungsort: Berlin, Gerichtsstand: Amtsgericht Berlin-Mitte.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40

Fernspr.: Merkur 3126, 3127, 4483, 5460, 6104, 6171, 7454. Postscheckkonto: Berlin 102373, Budapest 59951, Prag 77329, Warschau 191157, Wien 174439. Bankkonto: Dresdner Bank, Dep.-Kasse F, Spittelmarkt, Darmstädter u. Nationalbank, Dep.-Kasse 15, Kommandantenstr. 6. Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Geschäftszeit: Montag bis Freitag 8 bis 4¾ Uhr.

Das praktische Geschenk für den Ingenieur ist die HÜTTE

Bisher erschien von der neuen Auflage:

Band I „Grundlagen der Technik"

Band II „Maschinenbau, Elektrotechnik"

Preise:

je RM 17.50 in Leinen, RM 20.50 in Leder geb.

für VDI-Mitglieder: Leinen RM 15.75, Leder RM 18.45

Seit 75 Jahren ist die „Hütte" der treue Freund und zuverlässige Berater eines jeden Ingenieurs. Sie behandelt in ihren vier Bänden die gesamte Technik in vielen Zahlentafeln, Formeln, neuzeitlichen Ausführungsformen und -verfahren. Zu ihrem Mitarbeiterstab zählen die führenden deutschen Fachleute. Deshalb ist die „Hütte" für jeden Ingenieur unentbehrlich.

Neuerungen an der 26. Auflage

1. **Kapitelübersicht u. Verzeichnis häufig gebrauchter Tafeln auf den Vorsatzblättern**
2. **Daumeneinschnitte erleichtern das Auffinden wichtiger Abschnitte**
3. **Jedem Abschnitt ist eine Inhaltsübersicht in Stichwortform vorangestellt**
4. **Steigerung der Übersichtlichkeit des Textes durch Anwendung von Kleindruck für Beispiele, Erklärung von Konstruktionen usw.**
5. **Vollständige Neubearbeitung, neue Kapitel und starke Umfangsvermehrung**
6. **Gutscheine, die den Einzelbänden beigefügt werden, berechtigen zum Bezug des Gesamtsachverzeichnisses zu einem Vorzugspreis**

Bestellung erbeten unter Angabe ob **mit** oder **ohne** Daumenregister an die

VDI-BUCHHANDLUNG : BERLIN NW 7 : INGENIEURHAUS

Alle Zuschriften, die den wissenschaftlichen Inhalt der Zeitschrift betreffen, sind an den Herausgeber, Professor Dr. von Mises, Berlin NW 23, Siegmundshof 9, alle übrigen Zuschriften an den Verlag zu richten.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK

VOLS I-XIX

1921-39

Vol 12-13

UNIVERSITY MICROFILMS